Las matemáticas en la diversificación del riesgo de las inversiones financieras

Araceli Rendón Trejo*
Raúl Rendón Trejo*
Andrés Morales Alquicira*

Introducción

Desde mediados de la década de los 80, en México da comienzo un proceso de apertura al exterior. En 1989 el mercado de valores entra en ese proceso de internacionalización, lo que permitió una gama de opciones de inversión en diferentes mercados del mundo, al tiempo que generó una interdependencia.

La interdependencia de los mercados financieros y la apertura de sus servicios, hacen necesaria la creación de nuevas herramientas y conocimientos que permitan incrementar la efectividad, eficacia y competitividad de los diferentes perfiles de los inversionistas. En particular, la dirección financiera de las empresas ha ampliado su función de captación de recursos y de búsqueda de rentabilidad de la operación normal, a través de la canalización de los excedentes económicos en inversiones financieras. Esto en muchos casos, se ha convertido en un centro de utilidad por sí mismo.

El factor fundamental en las decisiones de inversión financiera lo constituye el factor riesgo,

* Departamento de Política y Cultura, UAM Xochimilco.

que ha sido abordado por diferentes metodologías. Dentro de éstas se incluyen tradicionalmente análisis de tipo cualitativo, sin embargo, las características que asumen las acciones en el mercado de valores, permiten la cuantificación del riesgo. Específicamente, la teoría moderna del portafolio asume el riesgo de las acciones por su nivel de volatilidad, éste se mide de manera estadística y se somete a pruebas probabilísticas. Otros procedimientos como la econometríay la investigación de operaciones, han contribuido al fortalecimiento de las finanzas y su desarrollo teórico- práctico.

La gran inestabilidad de los mercados financieros, acentuada a últimas fechas tanto a nivel nacional como internacional, hace necesaria la revisión de las contribuciones teóricas que en esta materia se han dado. Así mismo, es importante, su aplicación al caso mexicano.

Este artículo tiene como propósito mostrar la utilidad que tienen las herramientas matemáticas en la diversificación del riesgo en la conformación de carteras de inversiones financieras. Para ello en primer lugar se plantean consideraciones generales que son tomadas en cuenta en las decisiones de inversión y la metodología tradicionalmente empleada en la estructuración de las carteras. Posteriormente se presenta el sustento matemático en que se basa la di versificación del riesgo, desarrollado por la teoría moderna de portafolio. En tercer lugar se plantea el modelo financiero CAPM (*Capital Asset Pricing Modelj,* que utiliza indicadores de riesgo consistentes con la teoría anteriormente señalada. En este apartado se realiza además una aplicación del modelo haciendo uso de información de la Bolsa Mexicana de valores (BMV). Finalmente se plantean algunas reflexiones.

1. Consideraciones generales en las decisiones de inversión

Los mercados financieros están sujetos a múltiples perturbaciones en función de una gran cantidad de factores que se pueden expresar en ¡ncertidumbre y especulación. Esto hace fluctuar constantemente los precios, los rendimientos y las tasas de interés, lo que influye en la estructuración de carteras.

El conjunto de oportunidades de un portafolio hace referencia a las empresas que cotizan acciones o emiten obligaciones en la Bolsa Mexicana de Valores. Este portafolios puede consistir de uno, dos hasta los N activos disponibles. De igual manera es viable conformar portafolios con el mismo conjunto de oportunidades pero con distintos porcentajes de cada activo.

Los portafolios de inversión se constituyen con activos de manera que una disminución de precios y rendimientos sea compensado en mayor proporción por los valores que tengan movimientos a la alza. Es decir, se requieren activos con un rendimiento positivo, mayor que los rendimientos medios del mercado o de un instrumento de inversión aislado con un riesgo que se busca reducir al mínimo. El riesgo puede variar según la incertidumbre que exista respecto al rendimiento que se espera de una inversión.

En otros mercados financieros, sobre todo en los Estados Unidos, los riesgos inherentes a los rendimientos de los distintos instrumentos de inversión se han sometido a análisis estadístico y probabilístico. En este contexto, se ha llegado a denominar el riesgo de una inversión, como la variación que tiene su rendimiento a lo largo del tiempo.

No obstante que ese tipo de análisis ha sido cuestionado por cerca de 30 años, los estudios realizados por Levy y Markowitz (1979), Kroll, Levy y Markovitz (1984) han aportado evidencias empíricas del grado de consistencia en el uso del análisis de media-varianza, usando una gran variedad de herramientas matemáticas para representar las funciones de utilidad.

En México se ha hecho poco análisis matemático de los riesgos inherentes a las distintas inversiones, con su aplicación práctica al problema de la selección de inversiones. En el medio financiero mexicano se aplican diversas técnicas tradicionales con el objetivo de conformar portafolios de inversión, entre las que destacan:

a) Análisis fundamental

b) Análisis técnico

c) Análisis bursátil

Enfoque tradicional en el manejo del riesgo

Análisis fundamental

Este tipo de análisis se realiza a tres niveles: económico, financiero y de gestión empresarial. El primero de ellos analiza los aspectos macroeconómicos que influyen en el desarrollo de las empresas en el corto, mediano y largo plazo. Esto permite crear las expectativas de las empresas de acuerdo al estado de la economía en general y de la rama en la que se ubica la empresa emisora. Parte importante de este aspecto es considerar el comportamiento de aquellos indicadores macroeconómicos que inciden de manera directa en el ciclo económico y por lo tanto en la toma de decisiones de inversión.

El análisis financiero jerarquiza la selección de acciones de la empresa emisora, la cual se determina a través del análisis e interpretación de los estados financieros y se sintetiza en los valores que alcanzan las razones financieras. Entre los valores que constituyen los estados financieros se emplean algunas razones financieras, que muestran la estructura financiera y productiva de la empresa; el análisis e interpretación de estos indicadores se utilizan para determinar posibilidades y tendencias.

Por último, el análisis fundamental, incluye la evaluación de la gestión de la empresa en su aspecto organizativo y humano.

Análisis técnico

Complementario al análisis fundamental se encuentra el análisis técnico. Este busca jerarquizar la selección de acciones desde la perspectiva de los movimientos de la oferta y la demanda de valores. El análisis técnico supone que el comportamiento de la oferta y la demanda expresa todas las determinantes y características en torno a los valores negociados, que se sintetizan en cambios de precio y volumen de acciones intercambiadas en el mercado.

Este tipo de análisis utiliza herramientas estadísticas con las que se estima el comportamiento de los precios de las acciones dentro de ciertos márgenes que se llaman líneas de soporte y resistencia. Por medio de este análisis, se obtiene un pronóstico de la cotización de acuerdo a las fuerzas del mercado, de tal forma que ayude a seleccionar el momento más adecuado de compra y venta de una acción. Los instrumentos básicos del análisis técnico lo constituyen las gráficas en sus diferentes formas y contenidos.

Análisis bursátil

Se refiere al análisis de razones que muestran el comportamiento de las acciones individuales en los mercados financieros. El primer filtro de evaluación de una acción como candidato a inversión es su bursatilidad ya que la acción puede ser muy atractiva, pero esto no sirve de mucho si no se puede comprar ni vender en el momento oportuno. Como segundo filtro para la

[1] Capacidad de compra venta que tienen las acciones en el mercado de capitales y que se relaciona con la rapidez que tiene un instrumento en realizarse para hacerlo liquido.

evaluación de acciones se puede utilizar la relación precio/valor contable. Esta relación compara el precio del mercado con el valor contable o en libros de la acción.

Si la relación precio/valor contable está por abajo de 100%, implica que teóricamente, se puede comprar la acción por abajo del valor de los activos que los respaldan. Esto puede ser resultado de que los activos estén sobrevaluados, o posiblemente no tienen la capacidad de generación de utilidades para que el precio de la acción cumpla con el criterio de rendimiento. El caso contrario se presenta si la relación esta por arriba de 100%.

Otro indicador bursátil que estudia el comportamiento de la acción es la relación entre el precio de mercado y su utilidad, resultado de dividir la utilidad total entre el número de acciones. Este parámetro indica cuanto se paga a precio de mercado por cada peso de utilidad generada, de ahí que el valor real del múltiplo debiera ser la unidad, lo que significaría que la utilidad por acción se compra a su equivalente.

Si bien la estructuración de carteras de inversión en México se realizan comúnmente empleando la metodología del análisis cualitativo, en muchos casos la colocación de recursos económicos se realiza en acciones de empresas en los que se tiene una injerencia sobre el consejo de administración. Esto provoca en muchas ocasiones, ganancias raquíticas o pérdidas relativas por el costo de oportunidad que implica invertir en ciertos activos predeterminados en vez de otros más rentables.

Las metodologías tradicionales han sido ampliamente utilizadas, sin embargo son insuficientes para medir objetivamente los riesgos inherentes de un conjunto de activos. En cambio, la teoría moderna del portafolio, haciendo uso de indicadores estadísticos como la varianza, covarianza, desviación estadar, correlación, etc. ha generado una cuantificación del riesgo.

2. Análisis matemático en las inversiones financieras

Los mercados financieros se caracterizan por un ambiente de incertidumbre, en el que los elementos primordiales que definen y matizan su comportamiento no se encuentran articulados explícitamente, lo que crea un ambiente de razonamiento informal. Estas características hace viable el uso de modelos matemáticos para disminuir el nivel de riesgo de las inversiones financieras.

Estas metodologías buscan disminuir el nivel de incertidumbre asociado con uno o varios instrumentos financieros. En teoría financiera, el paradigma de la utilidad esperada está sustentado en el hecho de que los individuos escogerán aquellas alternativas que maximicen la utilidad esperada. Se define la utilidad esperada del impacto de un activo riesgoso sobre la riqueza como:

$$R i = \sum_{j=1}^{N} Pij\, Rij$$

Donde: Rij es la utilidad esperada,

Pij es la probabilidad asociada al activo.

Para determinar el riesgo del activo se emplea la varianza que haya presentado el activo; a saber:

$$\sigma i = \sum_{j=1}^{N} Pij\, (Rij - Ri)$$

Donde : Rij es la utilidad esperada,

Ri es la media

Pij es la probabilidad asociada al activo.

La ganancia esperada (retorno) de un portafolio de inversión se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$R p = \sum_{i=1}^{N} Xi\, \overline{Ri}$$

Donde: Xi es la proporción invertida en el activo iésimo,

Ri es el retorno esperado del activo iésimo.

Por otro lado, el riesgo en que se incurre en un portafolio se puede cuantificar por medio de la varianza del mismo; a saber:

$$\sigma^2{}_p = \sum_{j=1}^{N} X^2 i\ \sigma^2 j \ + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} X j\, Xk \ \ \sigma jk \qquad \forall j \neq k$$

Donde: X es la cantidad a invertir en el activo iésimo,

σ j es la varianza de cada activo

σ jk es la covarianza existente entre los diferentes activos riesgosos.

Mediante esta construcción es posible diversificar el riesgo en la medida en que se eligen activos con ciertas características.

Los efectos de incrementar el número de activos riesgosos en un portafolio de 1 a N, en el caso donde las inversiones son mantenidas en proporciones iguales, asumiéndose que la desviación estandar para todos los activos son la misma y que la correlación entre todos los pares de los diferentes activos son iguales a una constante distinta de cero se presenta a continuación.

Al obtener la varianza del portafolio se consideran las partes compuestas por la varianza y la covarianza, para muchos propósitos es útil estandarizar la covarianza. Al dividir la covarianza de los activos j y k entre el producto de las desviaciones estándar se obtiene el coeficiente de correlación.

$$\rho_{jk} = \sigma_{jk} / \sigma_j \sigma_k \qquad \rho_{jk} \in [\,-1,\ 1\,]$$

El que presenta las mismas propiedades que la covarianza pero con un rango de - 1 a +1. La fórmula de la varianza se puede analizar más ampliamente. En primer término, considérese al caso donde todos los activos riesgosos son independientes y más aún la covarianza entre ellos es cero. En este caso la varianza es cero y la fórmula se conforma de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{N} X^2 j\, \sigma^2 j$$

Asumiendo por otra parte que se invierten partes iguales en cada activo, con N activos las proporciones invertidas en cada activo, es 1/N. Aplicando la fórmula, se tiene:

$$\sigma^2 p = \sum_{j=1}^{N} (1/N)^2 \sigma^2 j \; = 1/N \left[\, \sum_{j\ 1}^{N} \sigma^2 j \,/\, N \right]$$

El término en los braquets presentan un promedio. De esta manera la fórmula se reduce a $\sigma p = (1/N)\sigma j$, donde σj representa el promedio de varianzas de los activos en el portafolio. En la medida que N se vuelve más grande, la varianza de el portafolio se vuelve más pequeña. En la medida en que N se vuelve extremadamente grande, la varianza de el portafolio se aproxima a cero. Este es un resultado general; si se tienen suficientes activos independientes, la varianza del portafolio converge cero. Sin embargo, en los mercados financieros siempre existen activos que covarian o se correlacionan positivamente; en este caso el riesgo del portafolio medido por la varianza no puede ser cero, empero puede ser menor que un activo individual. Al considerar la varianza de un portafolio definido anteriormente y considerando la misma proporción de inversión en cada uno de los activos; es decir X = (1/N), se tiene que la fórmula de la varianza del portafolio se plantea como:

$$\sigma^2 p = \sum_{j=1}^{N} (1/N)^2 \ \sigma^2 j + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} (1/N)(1/N) \ \sigma jk \qquad \forall j \neq k$$

Al desarrollar el término tenemos:

$$\sigma^2 p = (1/N) \ \sum_{j=1}^{N} \left[\sigma^2 j / N\right] + (N-1)/N \ \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left[\sigma jk / N(N-1)\right] \qquad \forall j \neq k$$

Los términos en los braquets son promedios. Hay N valores de j y (N - 1) valores de k. Además hay N-1 valores de k desde que k es diferente de j de tal manera que hay un valor más pequeña de k que de j. En total hay N (N-1) covarianzas. El segundo término de la sumatoria son las covarianzas divididas por el número de covarianzas y es un promedio. Reemplazando las sumatorias por los promedios, se tiene:

$$\sigma^2 p = 1/N \ \overline{\sigma^2} j + [(N-1)/N] \ \overline{\sigma} jk$$

Esta expresión es una representación más realista de lo que ocurre cuando se invierte en un portafolio de instrumentos financieros. La contribución de un instrumento individual en la varianza de un portafolio tiende a cero en la medida N se hace más grande. Por otro lado existe un límite a la diversificación, ya que si bien el riesgo inherente de cada activo individual se puede diversificar, la contribución en el riesgo total del portafolio originado por la covarianza no se puede manipular para disminuir la volatilidad del portafolio.

Si bien el sustento teórico planteado anteriormente provee las bases de la diversificación del riesgo, resulta insuficiente para la proporción óptima de activos en una cartera. Por ello el uso de modelos y algoritmos es útil en los procesos de cálculo.

A través del tiempo, la creación de modelos y algoritmos ha tomado como sustento matemático el análisis de media-varianza. El primero de ellos fue creado por Markovitz en 1959 con el uso de programación cuadrática, también se han creado modelos muy sofisticados de redes neuronales, inteligencia artificial y lógica difusa, pasando por los algoritmos de programación binaria, programación dinámica y complejos modelos econométricos. Evidentemente cada uno de ellos presenta ventajas y desventajas en la aplicación directa al caso mexicano.

Los algoritmos señalados consideran al conjunto de oportunidades consistente de N activos riesgosos como un conjunto convexo[2] debido a que contiene activos que están menos

---

[2] Un conjunto X en E se llama un conjunto convexo si dados cualesquiera dos puntos x1 y x2 en X, entonces $\lambda x1 + (1-\lambda)x2 \in X$ para cada $\lambda \in [0, 1]$. Cualquier punto con dichas condiciones se le denomina combinación convexa estricta.

que perfectamente correlacionados. En este conjunto convexo existen portafolio que dominan a otros, debido a que presenta una desviación estándar menor y el mismo retorno. Los portafolios que son dominados por otros se denominan portafolios ineficientes.

Una de las metodologías que permite su aplicación pragmática al caso de México es el modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) el que provee de una medida de riesgo consistente con la teoría del portafolio. El modelo CAPM se denota de la siguiente manera:

$$E\,(R\,j) = R_F + [\,E\,(\,R_M\,) - R_F\,]\,\beta j$$

donde, E (Rj)= El retorno esperado sobre el activo riesgoso.

RF = La tasa de retorno sobre un activo riesgoso.

E (RM)= El retorno esperado sobre el mercado.

βj = Medida del riesgo no diversificable sobre el jesimo activo riesgoso.

Del modelo CAPM se tiene que la tasa requerida de retorno de cualquier activo riesgoso es igual a una tasa de retorno libre de riesgo más un premio por el riesgo. En el modelo la beta cuantifica el riesgo.

$$\beta j = \sigma im \,/\, \sigma^2\, m = COV\,(Ri,\, Rm) /\, VAR\,(Rm)$$

El modelo muestra la covarianza entre los retornos del activo riesgoso i y el mercado en particular m dividido entre la varianza del mercado. El activo libre de riesgo tiene una beta de cero porque la covarianza con el mercado es cero. El mercado tiene una beta de uno porque la covarianza del mercado consigo mismo es idéntico a la varianza del mercado.

El riesgo total de un activo puede ser dividido en dos partes: el riesgo sistemático y el no sistemático. El primero mide la covarianza de un activo con la economía en su conjunto y no se puede diversificar. El segundo es independiente de la economía.

Riesgo total = riesgo sistemático + riesgo no sistemático

Las principales propiedades del modelo son:

1) En equilibrio, el precio de los activos deben de ajustarse a la línea segura del mercado (*security market line*).

2) La medida de riesgo para activos individuales es linealmente aditiva cuando los activos son combinados; es decir, la beta de un portafolio se puede obtener linealmente por la combinación ponderada de los activos.

No obstante que el riesgo sistemático presenta una definición parecida al riesgo dado por la covarianza, existen ciertas diferencias que se requieren puntualizar. El riesgo sistemático del CAPM asume la existencia de un mercado grande de activos riesgosos así como la disminución de costos por las oportunidades de diversificación. En el caso de riesgo, medido por la covarianza, u definición continua siendo relevante aún cuando el mercado tenga pocos activos. La conveniencia del uso de este modelo es la existencia de información que publica la Bolsa Mexicana de Valores en el que se incluye el valor beta para cada acción.

Como ejemplo se muestra el nivel de riesgo de dos portafolios de inversión que consideran activos riesgosos del mercado de valores, a través del modelo CAPM, tomando el mes de junio de 1994 como período de estudio (cuadro no.1). Cabe señalar que el rendimiento del mercado de capitales muestra una franca disminución medida por el índice de precios y cotizaciones.

La proporción óptima a invertir en las acciones se obtuvo, para el portafolio A, por medio de un algoritmo de programación cuadrática. Para el portafolio B a través de un algoritmo de programación lineal, en el que se considera además un instrumento del mercado de dinero (activo libre de riesgo) por lo que no se compone en su totalidad por acciones.

Cuadro 1
Conjunto de acciones

	Betas de Riesgo*	**Rendimiento Esperado****	**Porcentajes de Inversión Cartera A**	**Cartera B**
EMPAQ B	0.172852	0.004282723	**34.44**	15.00
GMD L	0.278375	0.003953326	**28.31**	12.89
TELMEX A	1.103088	-0.008868522	**0.0**	10.20
GFCRECE B	0.613166	-0.004944637	**0.0**	5.0
GSCB	0.963905	-.006963852	**37.25**	0.0

Notas:

* Periodo de muestra 03/julio/1989 a 30/junio/1994 igual al número de observaciones de los días operados.

** Cálculos propios del periodo de muestra 5/junio/1994 a 29/jun¡o/1994

Fuente: *Bolsa Mexicana de Valores.*

Cuadro 2
Principales características de las carteras

	Betas de Riesgo		Rendimientos esperados	
	Cartera A	**Cartera B**	**Cartera A**	**Cartera B**
EMPAQ B	0.059530229	0.0259278	0.00147497	0.000642409
GMD L	0.078807963	0.035882538	0.001119187	0.000509584
TELMEX A	0.0	0.112514976	0.0	-0.000904589
GFCRECE B	0.0	0.306583	0.0	-0.000247232
GCC B	0.359054613	0.0	-0.002594035	-.000247232
Total	0.4173928004	0.204983614	1.21597 E-07	1.71158E-07

Fuente: Cálculos; propios en base al cuadro anterior.

Para la interpretación de las betas de los portafolios es necesario se señalar algunas consideraciones importantes. Un portafolio bien diversificado tiene una beta igual a la del mercado, es decir igual a 1. En el caso de que un portafolio tenga una beta mayor a 1 se cataloga como un portafolio agresivo en el sentido de que su rendimiento es más volátil que el mercado mismo. Este portafolio se incrementa en mayor proporción en un boom del mercado y cae en mayor proporción en una fase de depresión. Esto se debe principalmente a que el conjunto de acciones del portafolio tienen un riesgo no diversificable más grande.

En el caso de que un portafolio tenga una beta menor que la del mercado se considera que es defensivo pues su rendimiento es menos volátil que el del mercado. Se incrementa en menor proporción en un auge y cae su pecio en menor proporción en una etapa depresiva. Este portafolio presenta un menor riego no diversificable.

Bajo estas características podemos señalar que los portafolios analizados presentan un menor riego no diversificable, particularmente en el portafolio B (ver cuadro no.2), ya que es el que tiene una menor beta. La combinación de riesgo y rendimiento lo caracterizan como el más óptimo.

Es importante destacar que el uso de los indicadores estadísticos permitieron cuantificar el riesgo de unos activos del mercado de valores, de tal manera que jerarquizan nuestras decisiones e inversión al buscar el mayor rendimiento y el menor riesgo posible.

Consideraciones finales

En las decisiones de inversión financiera, el enfoque tradicional ha sido en mayor medida empleado, pues es el más conocido. Sin embargo, el uso de modelos financieros que se sustentan en bases matemáticas se incrementa cada vez más, puesto que permiten conocer el valor del riesgo que presenta una cartera de inversión. Esto permite una mejor toma de decisión.

El uso de técnicas estadísticas han contribuido al desarrollo y fortalecimiento de las finanzas. Específicamente en las inversiones en el mercado de valores, las herramientas estadísticas han sido muy útiles para evaluar cuantitativamente el riesgo en las decisiones de inversión.

Bibliografía

i) Libros

Basara S. Mokhtar. *Linear Programing and Flow Network,* Wiley.

Chi-fu Huang and Robert H. ützenberger. *Foundations for Financial Economics,* North Holand.

David Blake. *Market Analysis,* McGraw Hill.

Elton E. and Gruber M. *Modern Portfolio theory and Investment Analysis,* Wiley.

Ralph Vince. *Portfolio Management Formulas,* Wiley & Sons.

Thomas E. Copeland. *Financial Theory and Corporate Policy,* Addison-Wesley.

Ziemba Vickso. *Stochastic Optimization Models in Finance,* Academic Press.

ii) Revistas

Bolsa Mexicana de Valores, Indicadores Bursátiles, junio de 1994.

———, Indicadores Financieros, agosto de 1994.

———, El mercado de Valores Mexicano, folleto de divulgación,

Thomas W. Epps. "Necessary, and Sufficient Conditions for the Mean-Variance Portfolio Model with Constant Risk Aversión", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* XvI:2, pp. 169-176.

Hal Varían. "1993 Portfolio of Nobel laureates: Markowitz, Miller and Sharpe" *Journal of Economic Perspective,* pp. 159-169.

Robert C. Merton. "Optimum Consumption and Portfolio rules in acontinuos time model", *Journal of economic Theory 3,* pp. 373-413.

———. "An intertemporal capital asset pricing model", *Econometrica 41 (5),* septiembre, pp. 867-887.

W. Wagner and Lau, S. "The effect of Diversification on Risk", *Financial Analysis Journal 27,*5, pp. 48-53.