

Un modelo matemático para determinar la sustentabilidad de un bosque

*Jorge Ruiz Moreno**

Resumen

El objetivo es presentar un modelo matemático para la explotación de una especie de árbol dentro del bosque, y determinar medidas de corte normativo para la sustentabilidad. Se muestra que si las condiciones naturales se mantienen en el bosque, como fertilidad, erosión del suelo, humedad, etcétera, la preservación depende de una política de reforestación efectiva. Con base en el modelo, se muestra que la sustentabilidad de la especie, aunada a la obtención del mejor de los ingresos, depende de una política de precios, sólo desde el punto de vista económico.

Palabras clave: modelo matemático, especie de árboles, sustentabilidad, reforestación, política de precios.

Abstract

The objective is to present a mathematical model for the exploitation of a species of trees in the forest and determine regulatory measures of sustainability. It is shown that if natural conditions such as fertility, soil erosion, moisture, etc are maintained in the forest then preservation depends on an effective reforestation policy. The model shows, just from the economic point of view, that sustainability in the forest and obtaining the best income depend on a pricing policy.

Key words: mathematical model, species of trees, sustainability, reforestation, pricing policy.

Artículo recibido el 08-10-10

Artículo aceptado el 05-07-11

* Profesor-investigador, Departamento de Producción Económica, División de Ciencias Sociales y Humanidades, UAM-Xochimilco, México [jrui@correo.xoc.uam.mx].

Los paradigmas positivos y normativos relacionados con la micro y la macroeconomía, los cuales fundamentan los mecanismos del mercado o Estado, no incorporan respuestas satisfactorias o no son suficientes para explicar por sí mismos los mecanismos sobre funcionalidad de la acción colectiva y que tome en cuenta la preservación de los recursos naturales.

Por un lado, el juego denominado dilema del prisionero, sea bipersonal o n-personal,¹ tiene como solución un único equilibrio de Nash,² el cual se determina por la intersección de las mejores respuestas decididas de manera aislada, donde cada uno considera un pago óptimo; todo ello parte de la premisa de conductas racionales. Con ello se muestra que el resultado social, producto de toma de decisiones aisladas, corresponde al peor, socialmente indeseable. La propiedad descrita es la importancia del dilema del prisionero. En términos lógicos se establece un isomorfismo entre esta situación y todas aquellas que tienen como marco las hipótesis del dilema del prisionero, por ejemplo el mercado. ¿Cómo poder explicar satisfactoriamente que la racionalidad de los agentes no conlleva a un equilibrio de Nash, donde individualmente, partiendo de su “inteligencia”, el resultado social es indeseable?

Por otro lado, las hipótesis para que la acción del Estado sea eficiente y cumpla los objetivos de beneficio colectivo, son en realidad restricciones muy fuertes, por ejemplo la concentración de una cantidad de información.

La teoría sobre la forma organizacional, desde comunidades hasta empresas, es muy diversa, cada situación se estudia por diversas ramas de las ciencias sociales, la administración, la política, entre otras. En el caso de los recursos naturales, Ostrom³ —entre otros autores— ha estudiado tanto a instituciones o neoinstituciones, así como diversas formas de autoorganización o autogestión, las cuales han resultado exitosas para comunidades, cooperativas, etcétera, que

¹ Paloma Zapata, *Economía política y otros juegos. Una introducción a los juegos no cooperativos*, México, Facultad de Ciencias, UNAM, 2008, p. IX.

² John F. Nash, “Non-Cooperative Games”, *Annals of Mathematics*, núm. 54, 1951, pp. 286-295.

³ Elinor Ostrom, *El gobierno de los bienes comunes. La evolución de las instituciones de la acción colectiva*, México, Fondo de Cultura Económica, CRIM-UNAM, 1951 (1990[2000]), p. 28.

se caracterizan por tener un excedente económico entre otras cuestiones y, además, consideran no llevar a cabo una depredación de los recursos naturales. Hardin,⁴ en la tragedia de los comunes, afirma que los recursos de uso común tienen como destino su depredación constante, y por ello su extinción.

Al resultado teórico obtenido por el dilema del prisionero y el estudio de Hardin, varios autores muestran que en la realidad los individuos no se comportan como se establece en dichos marcos. Afirman que se deben considerar aspectos culturales, históricos, cooperativos, compromisos, supervisión mutua, etcétera, los cuales son características importantes para resolver problemas colectivos. En Axelrod⁵ se presenta una discusión sobre la evolución de estrategias como elemento central para la solución, entre otros problemas, del dilema del prisionero. En Barkin⁶ y Rosas⁷ se realiza el análisis de situaciones de resultados exitosos obtenidos por la acción colectiva, tanto en términos históricos como casos particulares en comunidades muy diversas. Aunque el planteamiento de Ostrom se enmarca dentro de los Recursos de Uso Común, la posibilidad del isomorfismo se realiza en otros ámbitos, como el campesinado o el indígena en los otros autores.

En los marcos teóricos alternos como los señalados se colocan por delante los intereses colectivos, consideraciones éticas, formas de producción tradicional, la preservación de los recursos naturales, entre otros aspectos, por ejemplo en Toledo.⁸ Por ello, los análisis así realizados plantean otro tipo de estructura económica diferente a la economía dominante, con críticas a la racionalidad individual y la búsqueda de visiones alternas, otra lógica en la organización de la producción, distribución y la utilización del excedente. Diferente al *homo economicus* de la escuela económica dominante.

El modelo pretende estar enmarcado dentro de la economía ecológica, corriente que parte de tres principios éticos para la sobrevivencia del ser humano: la equidad, la justicia social y la sustentabilidad.⁹ El trabajo se encuentra dentro de los marcos alternos que proponen visiones teóricas diferentes a las denominadas dominantes o hegemónicas. En este contexto, las

⁴ Garret Hardin, "The Tragedy of the Commons", *Science*, vol. 162, 1968, pp. 1243-1248.

⁵ Robert Axelrod, *The Complexity of Cooperation*, Princeton University Press, 1997, pp. 28-43.

⁶ David Barkin, *Riqueza, pobreza y desarrollo sostenible*, (libro bilingüe), México, Jus, Centro de Ecología y Desarrollo y Centro Lindavista, 1998, pp. 23-33.

⁷ Mara Rosas B., *Una contribución a la economía ecológica: actividades no proletarias generadoras de ingresos* [<http://www.eumed.net/libros/2010a/647/Bibliografia.html>], 2009.

⁸ Víctor Toledo, "Principios etnoecológicos para el desarrollo sustentable de comunidades campesinas e indígenas", *Temas Clave*, núm. 4, 1996.

⁹ Mara Rosas B., *Una contribución a la economía ecológica...*, *op. cit.*, p. 7.

¹⁰ Howard Anton, Chris Rorres, *Aplicaciones de álgebra lineal*, México, Limusa, 1979, pp. 81-93.

siguientes preguntas son pertinentes e importantes y deben ser consideradas en la explotación sustentable de los recursos naturales: ¿qué objetivos se deben perseguir?, ¿quién debe aplicar las medidas para lograr los fines perseguidos?, ¿cómo se deben instrumentar las medidas para lograr los objetivos?, ¿qué formas organizativas? En este trabajo no se dan respuestas, simplemente se toman en cuenta a lo largo de la reflexión.

Más allá del modelo, es importante señalar sobre el establecimiento de instituciones y formas organizativas de ejidatarios y comunidades dedicadas a la explotación de recursos naturales, donde existen mayores posibilidades para generar condiciones y lograr formas de producciones denominadas alternativas exitosas y lograr la sustentabilidad. El trabajo plantea que los problemas de organización colectiva tanto horizontal como vertical son cruciales en la preservación del bosque.

Desde el punto de vista económico, este trabajo pretende mostrar que el problema consiste en caracterizar los mecanismos para llevar a cabo la producción, distribución y reproducción, entre otros aspectos, los cuales sean la base o generen la sustentabilidad. Fácilmente se percibe que el problema no es sólo económico.

El modelo está inspirado en los planteamientos realizados por Rorres-Anton,¹⁰ Grossman,¹¹ Poole,¹² D. y Jacob T. Schwartz,¹³ entre otros autores.

El documento tiene dos partes, la primera se dedica a dar un panorama general sobre la situación de los bosque en México y los posibles escenarios hacia adelante. En la segunda se plantea el modelo propiamente. En el planteamiento del modelo se utiliza álgebra básica y programación lineal.

SITUACIÓN GENERAL DEL BOSQUE EN MÉXICO

Dos comentarios iniciales: uno se refiere a la situación general de los bosques en México, y el otro a los escenarios posibles respecto de éstos. En el Mapa 1, en el anexo a este documento, se presenta la superficie boscosa de México.

Sobre el primer punto. Las distintas estadísticas de instancias gubernamentales como el Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), la Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales (Semarnat), la Comisión Nacional Forestal (Conafor desde 2001), hasta el momento no son comparables

¹¹ Stanley Grossman, *Álgebra lineal*, México, Mc Graw-Hill, 2008.

¹² David Poole, *Álgebra lineal: una introducción moderna*, México, Thomson, 2008.

¹³ Jacob T. Schwartz, *Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics*, Nueva York, Gordon and Breach, 1962.

debido a metodologías utilizadas en su elaboración, ello ha planteado dificultades para determinar con precisión la situación específica de la superficie mexicana con recursos forestales, entre otros aspectos, no se tiene una medición precisa de la tasa de deforestación. Sobre la discusión de los datos es de resaltar la reacción de las instancias gubernamentales a las publicaciones de la Organización para la Agricultura y la Alimentación (FAO), que durante décadas ha ubicado a México entre los lugares cinco a diez primeros en tasas de deforestación, la cual, señala la FAO, “pone en riesgo la seguridad alimentaria y la continuidad de la vida”. Con las reservas usuales sobre la información oficial se han elaborado los siguientes cuadros tomando en cuenta las estadísticas de INEGI, es decir, información del Estado publicada recientemente; cabe señalar que las estadísticas han sido criticadas por diversos académicos y organizaciones que se dedican a la protección del medio ambiente, como Greenpeace.

CUADRO 1
Cifras del bosque en México
Superficie boscosa de México (kilómetros cuadrados)*

	1970	1980	1990	1997	2000	2005
	1 023 410	960 310	897 210	869 161	857 140	841 460
Porcentaje respecto a superficie total	53.6	50.3	47	45.5	44.9	43
Devastación km ²	0	63 100	126 200	154 249	166 270	181 950
Tasa de deforestación	0	6.1	12	15	16	17

* La superficie territorial de la República Mexicana es de 1 964 375 kilómetros cuadrados, o 195 924 800 hectáreas (INEGI, 1999).

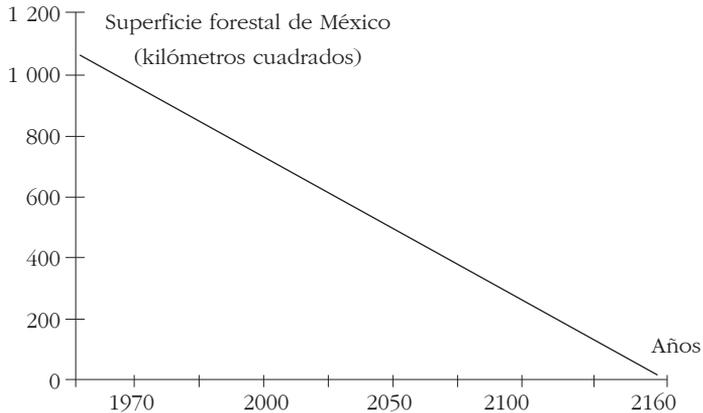
Fuente: elaboración propia con información de INEGI.

El Cuadro 1 presenta las cifras de la superficie boscosa, el porcentaje que representa dicha superficie respecto al total, los kilómetros cuadrados devastados y la tasa de deforestación; para ello se tomó como base el año de 1970.

Se puede observar que en un lapso de 35 años se ha llevado a cabo una deforestación de más del 10% del territorio nacional o el 17% respecto a la superficie boscosa de 1970. Las cifras de deforestación son similares en las décadas de 1980 y 1990, a partir de entonces se comportan de manera

descendente. Bajo la hipótesis que se mantiene la misma estructura en la economía mexicana, es decir, que la tasa de deforestación es la necesaria para mantener los niveles de “crecimiento económico” y respectiva utilización de recursos forestales en la economía como hasta ahora, entre otras cuestiones, la tendencia de extinción de la superficie boscosa se muestra en la Gráfica 1.

GRÁFICA 1



Bajo hipótesis de explotación racional de los bosques, donde fundamentalmente se mantiene el mismo comportamiento de utilización en la economía de dicho recurso como hasta ahora, se observa una deforestación lenta y constante, lo cual acabará con los bosques en ciento cincuenta años.

Fuente: elaboración propia con base en datos de INEGI, FAO y OCDE.

Si bien puede ser cuestionable que la extinción del bosque siga un comportamiento lineal, es de esperar que una curva logística o de otro tipo preserve un comportamiento menos decreciente. También es de esperar que si se mantiene la misma estructura económica como hasta ahora, y se tienen tasas de crecimiento económico anuales superiores a las existentes, la intersección de la gráfica con la abscisa es mucho más cercana al año 2160.

La explotación de los bosques y selvas en México, si bien tiene una base en su utilización, ya sea como materia prima o lo que corresponda en la actividad económica, también tiene una explicación en términos de ser una actividad rentable. En el Cuadro 2 se presentan los datos desde 1989 hasta 2008, donde se muestra el volumen de toda la producción obtenida de los bosques, medida en metros cúbicos, la segunda columna corresponde al valor

de la producción total y la tercera es el valor, en promedio, de un metro cúbico en el año de producto forestal correspondiente. Aunque el precio unitario de la producción forestal puede cambiar, dependiendo del tipo de árbol, ya sea pino u otra madera preciosa, los datos arrojan un comportamiento de los precios en valor agregado promedio de la madera.

CUADRO 2
Valor económico de la producción forestal

Evolución de la producción forestal y su valor			
Año	Volumen (m ³)	Valor en pesos	Valor de un m ³
1989	8 888 276	895 505 430	100
1990	8 157 204	923 085 453	113
1992	7 682 061	1 143 947 871	148
1994	6 406 750	1 066 493 295	166
1996	6 843 786	1 896 734 338	277
1998	8 330 982	3 668 504 852	440
2000	9 429 800	5 153 186 648	546
2002	6 664 720	5 307 823 398	796
2004	6 718 508	6 397 956 570	952
2006	6 481 168	6 823 933 838	1052
2008	6 163 842	ND	ND

Fuente: elaboración propia con datos de INEGI.

Tomando como base el año de 1989, el precio de un metro cúbico se ha incrementado en mil cien por ciento hasta 2008, es una de las actividades nada despreciable para los empresarios forestales. La depredación de los bosques en México tiene como base la obtención de altos ingresos por su venta, en particular de la madera. La explotación de los bosques en México va más allá de los marcos teóricos planteados por la tragedia de los comunes, debido a que todo esto ocurre a la sombra de las instituciones estatales.

El segundo comentario se refiere a dos escenarios que se desprenden de la situación anterior.

Existen distintos actores importantes que desempeñan un papel importante en la situación de los bosques.

Por un lado, el Estado, los empresarios forestales, los talamontes encargados directamente de la deforestación y todos aquellos sectores económicos que requieren los recursos forestales como materia prima. Otros actores, de igual

o mayor importancia son los ejidos y comunidades comunales o indígenas, así como todos aquellos que requieren de recursos no necesariamente madereros. Veamos cada uno de ellos.

Las leyes mexicanas determinan que el Estado¹⁴ es el responsable de establecer lo conducente para el manejo de los bosques y selvas, la responsable directa es la Semarnat, quien a su vez depende para este rubro de la Conafor. Lo importante de esta comisión es establecer la política y las cuestiones importantes sobre el tema: explotación, comercialización, reforestación, etcétera. Tan sólo como muestra un botón de su estrategia declarada. Actualmente (2 de octubre de 2010) el gobierno federal ofreció a los empresarios “quince millones de hectáreas con recursos forestales para ser explotadas y once millones más que con potencial de alto rendimiento”,¹⁵ lo anterior se acompaña con un “crédito de cinco mil millones de pesos” para realizar la explotación forestal. En la estrategia declarada del gobierno se manejan conceptos como desarrollo forestal sustentable y su explotación racional, mostrando cómo la explotación de este recurso es un negocio “natural”. Evidentemente el concepto de sustentabilidad en nada se asemeja a la definición por ejemplo de Víctor Toledo,¹⁶ quien dice: “Se puede definir un desarrollo comunitario sustentable como aquel proceso de carácter endógeno por medio del cual una comunidad toma (o recupera) el control de los procesos que la determinan y la afectan”. La invitación del gobierno es a los empresarios forestales. De este escenario cabe esperar la continuidad de la depredación forestal cuyo origen tiene como base los altos ingresos. Si bien las leyes pretenden proteger los bosques, la deforestación avanza de manera paulatina, lo cual se muestra con el incremento de localidades urbanas, el desmonte para cultivos distintos a los forestales o pastizales, entre otras causas.

La ley Forestal contempla que los ejidatarios, comuneros y comunidades indígenas son también propietarios de los recursos forestales. David Bray, Leticia Merino y Deborah Barry¹⁷ estima que 80% de los bosques están en manos de este sector; Bray ha acuñado el término de Comunidades Forestales Comunales para el sector forestal que organiza la utilización del bosque considerando su conservación. Otros estudios como los de Mara Rosas¹⁸ las denominan Actividades No Proletarias Generadoras de Excedente. En el Mapa

¹⁴ “Ley forestal”, *Diario Oficial de la Federación*, 22 de diciembre de 1992.

¹⁵ [www.expoforestal.gob.mx/es/videos].

¹⁶ Víctor Toledo, “Principios etnoecológicos para el desarrollo...”, *op. cit.*

¹⁷ David Bray, Leticia Merino y Deborah Barry, *Los bosques comunitarios de México*, México, Semarnat/INE/CCMSS/UNAM/Universidad de Florida, 2004, p. 26.

¹⁸ Mara Rosas B., *Una contribución a la economía ecológica...*, *op. cit.*, p. 7.

2, que se presenta en el anexo, se observa el número de comunidades ubicadas sólo en los bosques húmedos, de coníferas y encinos. Se han realizado diversos estudios sobre los retos presentes en estas comunidades como son: el mercado, la conservación y la biodiversidad, la capacitación y consolidación de las estructuras organizativas de las comunidades, la distribución y utilización del excedente, la implementación de normas, castigos. Múltiples estudios se han y deben ser llevados a cabo.

Cualquier desenlace sobre la situación del bosque en México se determinará por la interacción de todos estos participantes, el presente trabajo no profundizará más en dichos actores.

MODELO SOBRE USO RACIONAL DEL BOSQUE

A continuación se presenta el modelo matemático sobre la sustentabilidad del bosque.

Como en todo modelo, se realizan una serie de supuestos para estudiar el bosque. El problema consiste en tomar las variables de las cuales depende su estructura. Se inicia con una descripción general del bosque, lo cual nos ayuda a formalizar su funcionamiento.

Partimos que en un bosque se ha llevado a cabo una clasificación por especie. Nos concentramos sólo en una especie de árbol. La especie en cuestión se divide en clases según el tamaño que tiene cada árbol, así determinamos n clases: la clase 1 tienen una altura que oscila en el intervalo $[0, h_1)$, los de la clase 2, $[h_2, h_3)$ y así sucesivamente, en la última clase se ubican los árboles con máxima altura.

CONDICIÓN DE SUSTENTABILIDAD

El modelo supone que los árboles son dejados crecer por un lapso de tiempo, identificado con un periodo de cultivo. Después de transcurrir dicho lapso, en cada clase se cortan cantidades determinadas para ser utilizada en la actividad correspondiente. Cuando se cumpla la condición que al menos se mantiene un número de árboles, periodo tras periodo, diremos que se realiza una explotación sustentable del bosque. Para esto suponemos existe una organización social comunitaria con responsabilidades, procesos y objetivos claramente establecidos. Las preguntas de para qué, cómo, cuánto, producir se han decidido colectivamente. También se tiene claro, entre otros aspectos, para qué utilizar y qué hacer con los ingresos obtenidos. En general, suponemos

aquellas características que se han estudiado en comunidades donde se realizan Actividades No Proletarias Generadoras de Excedente.

Desde el punto de vista microeconómico, el sector forestal es un mercado más donde el precio se establece por la igualdad oferta y demanda, y la cantidad de árboles cortados se determina por la optimización de la ganancia. En este punto retomo las diversas críticas realizadas a este enfoque, las cuales abarcan los aspectos teórico, práctico, positivo, normativo, etcétera, y no dan una respuesta satisfactoria. En el enfoque microeconómico no se elimina la tragedia de los comunes planteada por Hardin y no se tienen condiciones para preservar el bosque.

La sustentabilidad tiene que garantizar que al menos se mantiene el mismo número de árboles, periodo tras periodo, con lo cual podemos afirmar que la especie se preservará. De entrada, el modelo se abre a diferentes configuraciones y formas de explotación, un caso es aquel donde se realiza un corte proporcional en cada clase, otro es donde sólo se cortan árboles con altura máxima, etcétera.

FUNCIONAMIENTO DEL MODELO

El modelo funciona de la siguiente manera. Supongamos que nos ubicamos en el inicio del periodo, en este momento se tiene una estructura caracterizada por el conocimiento del número de árboles y su clasificación en tamaños, como explicamos antes. En el transcurso del periodo de producción en cuestión se realizan las actividades correspondientes para el cultivo y el funcionamiento de la naturaleza sin ningún problema y así hasta se llegar a la etapa de corte.

Posteriormente, en cada clase se realiza el corte correspondiente. Denotamos con c_i a la cantidad de árboles cortados en la clase i al final del periodo. Por otro lado, la cantidad de árboles que permanecen después del corte en la clase i la denotamos con a_i . La suma de a_i con c_i determina el número de árboles presentes desde el inicio del periodo en la clase i . Con estos datos formamos los vectores columna n dimensionales c y a , cuyas entradas corresponden al total de árboles cortados y los que se preservan en la clase correspondiente.

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad S = a + c = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Así, el vector $S = a + c$, en cada inicio de temporada incluye el número de árboles no cortados a , que identificamos como los árboles por preservar y los que se cortaran al final de temporada c . La sustentabilidad del bosque, formalmente, se determina si al menos se mantiene el vector $S = a + c$ durante cada final de periodo hasta antes del corte, en particular, al menos se preservaron el siguiente número de árboles.

$$\sum_{i=1}^n a_i = S$$

La igualdad anterior dice que el número de árboles es el mismo periodo tras periodo. Se mantiene la hipótesis que cada árbol en su clase correspondiente no muere durante el periodo, no es difícil quitar este supuesto, e incluirlo no altera las conclusiones principales.

En el transcurso del periodo, en cada clase los árboles tienen un desarrollo resultado del cultivo y la acción de la naturaleza, algunos incrementan su tamaño y pasan de la clase 1 a la 2, de 2 a 3, así sucesivamente, denotamos con g_i a la fracción de árboles que en un periodo pasan de la clase i a $i+1$. En consecuencia, la fracción restante $1 - g_i$ permanecerá durante el próximo periodo en su misma clase. Entonces $(1 - g_i)a_i$ y $g_i a_i$ corresponden a las cantidades totales de árboles de la clase i que no crecieron durante la temporada, los cuales permanecen en la misma clase y la cantidad que pasa a la siguiente, como ejemplos, $(1 - g_1)a_1$ es la cantidad total de árboles de la clase 1 que no lograron alcanzar una altura adecuada y permanecerán en la clase 1 durante el siguiente periodo; de manera análoga, $g_1 a_1 + (1 - g_2)a_2$ corresponde a los árboles de la clase 1 que crecen y pasan a la clase 2 y los de la misma clase 2 que no tuvieron un crecimiento adecuado y por ello permanecerán en la clase 2, la suma es el total de árboles en la clase 2 producto del desarrollo natural. Lo mismo se tiene en las otras clases, finalmente, en la clase n , se tienen $g_{n-1} a_{n-1} + a_n$ árboles. Todo ello al final del periodo en cuestión. Se determina así el vector,

$$G = \begin{pmatrix} (1 - g_1)a_1 \\ g_1 a_1 + (1 - g_2)a_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} a_{n-2} + (1 - g_{n-1})a_{n-1} \\ g_{n-1} a_{n-1} + a_n \end{pmatrix}$$

Este vector determina la estructura del bosque al final de un periodo, por la acción de la naturaleza y las actividades propias de cultivo.

Estudiar las variables de las cuales depende g_i queda fuera de este trabajo, basta señalar que algunos factores importantes son la humedad, fertilidad, el tipo de suelo, la ubicación geográfica, la estructura genética de la especie, entre otros aspectos.

SUSTENTABILIDAD Y POLÍTICA DE REFORESTACIÓN

De entrada suponemos que no necesariamente se realiza una política de reforestación efectiva. La reforestación tiene al menos dos actividades importantes, la primera consiste en reponer o incrementar el número de árboles cortados al final de un periodo, y la segunda en establecer las condiciones para que dichos árboles tengan un desarrollo adecuado. Esto conlleva por lo menos a mantener la superficie forestal o su incremento. En términos cuantitativos, la política de reforestación se concreta al plantar y mantener una cantidad r de árboles, los cuales pasarán a formar parte sólo de la clase 1. Realizar estas actividades implica la existencia de una infraestructura como viveros y condiciones suficientes para realizar el proceso de siembra. En los viveros se debe garantizar que los árboles tengan una altura menor o igual a la altura h_1 , usualmente de tamaño pequeño, los cuales puedan ser trasplantados y continuar con sus cuidados correspondientes. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dicha reforestación se realiza después del corte y antes del inicio de un nuevo periodo.

La reforestación de una cantidad de r árboles depende en lo fundamental de una decisión por quienes tienen la responsabilidad del bosque, ocurre cuando dicha actividad resiembra un número mayor o igual a la cantidad de árboles cortados:

$$\sum_{i=1}^n c_i \leq r$$

La entrada i -ésima del vector GR ,

$$GR = \begin{pmatrix} (1 - g_1)a_1 \\ g_1a_1 + (1 - g_1)a_1 \\ \vdots \\ g_{n-2}a_{n-2} + (1 - g_{n-1})a_{n-1} \\ g_{n-1} a_{n-1} + a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donde } R = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

determina la estructura del bosque, en particular indica el número de árboles en la clase i . Específicamente la estructura se forma durante el periodo de producción en cuestión, intervienen las condiciones naturales que prevalecen en el lugar de cultivo y el trabajo de reforestación. El vector R es la reforestación realizada, los cuales suponemos pertenecen a la clase 1. Estas dos condiciones determinan la cantidad de árboles en cada clase al finalizar un periodo e iniciar otro.

En resumen, formalmente la condición de sustentabilidad implica mantener al menos los vectores a y c al final de cada periodo, con ello se garantizan dos cuestiones importantes: al menos se preserva un determinado número de árboles en cada clase con el vector a , y también se garantiza otra cantidad para las actividades de corte correspondientes mediante el vector c .

Para mantener una estructura sustentable en la especie de un árbol dentro del bosque es importante tanto de la cooperación de la naturaleza como las actividades realizadas por quienes tienen el poder de decisión sobre el bosque en función de su cultivo y explotación. En términos del presente modelo, al fijar los vectores a y c , la sustentabilidad depende de g y r . Veamos este aspecto.

Un aspecto importante es la relación entre los vectores S y GR . Se retoman las expresiones de arriba para los vectores transpuestos correspondientes:

$$S = a + c = (a_1 + c_1, a_2 + c_2, \dots, a_n + c_n) \text{ y } GR = ((1 - g_1)a_1 + r, g_1a_1 + (1 - g_2)a_2, \dots, g_{n-1}a_{n-1} + a_n).$$

DISMINUCIÓN DEL BOSQUE

Si $S > GR$, no se garantiza la sustentabilidad.

$$S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} (1 - g_1)a_1 \\ g_1 a_1 + (1 - g_1)a_1 \\ \vdots \\ g_{n-2}a_{n-2} + (1 - g_{n-1})a_{n-1} \\ g_{n-1} a_{n-1} + a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = GR$$

En efecto, a partir del lado derecho de la expresión, significa que todas las clases de árboles no lograron alcanzar su altura o la reforestación fue insuficiente o ambas. Si no existen cambios en la naturaleza como fertilidad del suelo, humedad, etcétera, es decir, no se alteran las condiciones para modificar g_i , la relación anterior significa una inadecuada política de reforestación. Fácilmente se observa que la alteración exógena de las g_i puede acarrear alteraciones en la reforestación. En aquellos lugares donde se realiza una reforestación inadecuada, existe pérdida de fertilidad y de humedad, que generan una modificación en particular en el crecimiento de los árboles, lo cual a su vez provoca cambios en g_i . Se obtiene así que una inadecuada política de reforestación r_i conlleva a cambios en g_i los cuales no ayudan en nada para mantener una especie de bosque. Es de señalar los esfuerzos de investigación que se llevan a cabo para lograr cultivos en lugares con condiciones adversas a los que usualmente se tienen tradicionalmente, en nuestro caso, la modificación de g_i .

CRECIMIENTO DEL BOSQUE

Cuando $S < GR$ no sólo se garantiza el crecimiento del número de árboles,

$$S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} (1 - g_1)a_1 \\ g_1 a_1 + (1 - g_1)a_1 \\ \vdots \\ g_{n-2}a_{n-2} + (1 - g_{n-1})a_{n-1} \\ g_{n-1} a_{n-1} + a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = GR$$

Por argumentos similares a los dados en el párrafo anterior, significa que la política de reforestación es tal que se puede incrementar la cantidad de árboles por preservar o incrementar su explotación, lo cual no excluye ambas

posibilidades. En este caso es necesario contar con una superficie cada vez mayor, por lo cual se tiene la sustentabilidad del bosque.

PRESERVACIÓN DEL BOSQUE

Un caso importante es cuando se mantiene la misma estructura periodo tras periodo, es decir, se cumple la igualdad, $S = GR$.

$$S = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - g_1)a_1 \\ g_1 a_1 + (1 - g_1)a_1 \\ \vdots \\ g_{n-2}a_{n-2} + (1 - g_{n-1})a_{n-1} \\ g_{n-1} a_{n-1} + a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = GR$$

Desde el punto de vista del modelo, varias consideraciones previas son importantes. La igualdad significa que en cada periodo se preserva un vector a de árboles, se garantiza un vector de árboles para su corte c , se mantiene la misma fracción g_i en cada clase, y se realiza una reforestación efectiva, sembrando exactamente los árboles cortados,

$$\sum_{i=1}^n c_i = r$$

Por ello, la igualdad supone mantener la misma estructura del bosque en los inicios de dos periodos consecutivos.

SUSTENTABILIDAD, UNA CONDICIÓN MATEMÁTICA EQUIVALENTE

Una cuestión importante es estudiar el conjunto de condiciones, desde el punto de vista de nuestras variables, para establecer una misma estructura del bosque periodo tras periodo. De momento consideremos que es válida la igualdad $S = GR$. La igualdad anterior es equivalente al cumplimiento de las n igualdades:

$$a_1 + c_1 = (1 - g_1)a_1 + r, \quad a_2 + c_2 = g_1 a_1 + (1 - g_2)a_2, \dots, \quad a_n + c_n = g_{n-1}a_{n-1} + a_n$$

La primera de estas igualdades implica que en el inicio de un periodo, la actividad de reforestación y los árboles de la clase 1 que no lograron una altura necesaria para pertenecer a la siguiente clase, mantienen una cantidad

de árboles y aquellos que fueron cortados. En caso que $c_1 > 0$ significa cortar árboles de altura muy reducida, lo cual suponemos no es factible, por ello la primera igualdad se reduce a $g_1 a_1 = r$. Las demás igualdades se describen como: $c_2 = g_1 a_1 - g_2 a_2, \dots, c_n = g_{n-1} a_{n-1}$. Para los casos c_2, c_3, \dots, c_n no negativos, significa la posibilidad de árboles cortados en cada clase, debido a esto tenemos que $g_1 a_1 \geq g_2 a_2 \geq \dots \geq g_{n-1} a_{n-1} \geq 0$. La reforestación repone exactamente los árboles cortados,

$$\sum_{i=1}^n c_i = r$$

Los argumentos anteriores demuestran la siguiente proposición matemática: una condición necesaria y suficiente para realizar explotación duradera de un bosque, que preserve la misma estructura periodo tras periodo, se logra siempre y cuando se cumplen las desigualdades siguientes: $g_1 a_1 \geq g_2 a_2 \geq \dots \geq g_{n-1} a_{n-1} \geq 0$, en otras palabras, la cantidad de árboles de una clase anterior y que pasan a la clase siguiente siempre es mayor o igual a la de la clase subsecuente.

La conclusión importante que se desprende de la proposición mostrada en el párrafo anterior, es que la preservación de una especie de árbol se determina por las condiciones naturales que se incorporan en el vector formado por las cantidades g 's y cantidades de árboles por preservar a 's. En primera instancia, g depende de factores naturales y a de decisiones de política forestal.

De lo anterior obtenemos la siguiente conclusión. Establecido el criterio de sustentabilidad, de mantener una estructura del bosque o su posible incremento, la variable más importante para lograr dicho objetivo es la política de reforestación, lo cual también es importante en el establecimiento de los vectores a, g y r .

EXPLOTACIÓN SUSTENTABLE Y RACIONAL

¿Es posible mantener una explotación sustentable de un bosque, cuyo fin sea la obtención de un ingreso por la actividad forestal correspondiente? Aquí se utiliza el modelo planteado anteriormente para responder a esta pregunta. La pregunta y la respuesta son relevantes debido a que en México se tiene una superficie de bosques importantes, donde las comunidades poseen una parte significativa, y se lleva a cabo una explotación con beneficios de dicha explotación (Mapa 2).

Se parte de que el valor de un árbol de la clase i es p_i . No se discuten los determinantes del valor de un árbol debido a su complejidad y características específicas. Desde un punto de vista no económico, objetos como árboles simplemente carecen de valor debido al tipo de objeto que es. Se parte de un punto de vista económico pragmático respecto de este punto y se comparten las objeciones en este punto.

Supongamos que existen condiciones que garantizan la igualdad de los vectores S y GR . En este caso la cantidad de árboles cortados en cada clase c_i tienen como destino la obtención de un ingreso. El ingreso total por la venta de corte es:

$$I = p_2c_2 + \dots + p_nc_n.$$

Al sustituir las siguientes igualdades $c_2 = g_1a_1 - g_2a_2, \dots, c_n = g_{n-1}a_{n-1}$, se tiene:

$$I = p_1g_1a_1 + (p_3 - p_2)g_2a_2 + \dots + (p_n - p_{n-1})g_{n-1}a_{n-1}$$

Para precios y g 's establecidos de manera endógena, el ingreso depende de la cantidad de árboles por preservar en cada clase.

La sustentabilidad en el cultivo de una especie de árbol debe garantizar dos condiciones, primero, preservar una misma estructura del bosque y la segunda, garantizar que el ingreso obtenido por la venta de los árboles cortados es el máximo posible. La formulación matemática de la primera condición es $S = GR$. Se mostró que esta condición de sustentabilidad es equivalente a, $g_1a_1 \geq g_2a_2 \geq \dots \geq g_{n-1}a_{n-1} \geq 0$. Mientras que la segunda condición es determinar el ingreso máximo I . Se conjuntan estos dos aspectos en el siguiente problema,

$$\text{Maximizar } p_1g_1a_1 + (p_3 - p_2)g_2a_2 + \dots + (p_n - p_{n-1})g_{n-1}a_{n-1}$$

$$\text{sujeto a } g_1a_1 \geq g_2a_2 \geq \dots \geq g_{n-1}a_{n-1} \geq 0 \quad g_1a_1 \geq g_2a_2 \geq \dots \geq g_{n-1}a_{n-1} \geq 0$$

$$\text{y } \sum_{i=1}^n a_i = S$$

La solución del problema se obtiene por la aplicación de la programación lineal, al aplicar este algoritmo tenemos que la solución¹⁹ consiste en cortar todos los árboles en las clases $i = 1, \dots, n$ donde,

$$\frac{p_i}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{i-1}}} \geq \frac{p_j}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{j-1}}}, j = 1, \dots, n$$

A esta desigualdad se le nombra condición de maximización del ingreso, que mantiene la sustentabilidad de la especie del árbol. La solución tiene dos significados interesantes.

Una primera interpretación parte de conocer los precios y el conjunto de g 's, lo cual implica que las condiciones naturales permanecen sin cambio, y las g 's están determinadas. La solución son cantidades a_1, a_2, \dots, a_n que garantizan el ingreso máximo por la venta de los árboles cortados. Las mismas cantidades garantizan un vector a y c de árboles para ser preservados y cortados cuyo número no cambia periodo tras periodo, donde $c_1 = 0, c_2 = g_1 a_1 - g_2 a_2, \dots, c_n = g_{n-1} a_{n-1}$. Con lo cual se determinan el número de árboles por cortar en cada clase.

Supongamos que hemos localizado la clase i donde se cumple la condición para obtener el ingreso máximo. Aquí se corta la cantidad de árboles $c_i > 0$ y no se realiza corte alguno en las clases restantes, se tiene $c_j = 0$ para $j \neq i$. Aunque matemáticamente no se excluye la existencia de dos i 's o más diferentes que satisfacen la condición de maximización, se elige la mínima de ellas. Un caso extremo es cuando la condición de maximización, la igualdad se cumple en todas las clases, aquí cualquier vector a que cumple la igualdad $S = GR$ arroja el mismo ingreso máximo.

Si sólo existe una única i donde se cumple la condición de maximización, se tiene que para cualquier clase $k > i, a_k = 0$ para $k = i, \dots, n$, en efecto, al cortar todos los árboles de la clase i se extinguirán los de la clase $i+1, i+2, \dots, n$. Los árboles cortados c_i determinan la cantidad por reforestar r . Quiere decir que,

$$g_1 a_1 = r = c_k, c_2 = g_1 a_1 - g_2 a_2 = 0, \dots, c_{i-1} = g_{i-2} a_{i-2} - g_{i-1} a_{i-1} = 0, c_i = g_{i-1} a_{i-1}, c_{i+1} = g_i a_i - g_{i+1} a_{i+1} = 0, \dots, c_n = g_{n-1} a_{n-1} = 0.$$

¹⁹ Jacob T. Schwartz, *Lectures on the Mathematical Method...*, op. cit.

Precisamente de sustituir adecuadamente, el ingreso máximo es,

$$I_{max} = p_i c_i = \frac{p_i s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{i-1}}}$$

También se determina la estructura del bosque en términos del número de árboles en cada clase, así, el vector de árboles no cortados que se preserva periodo a periodo es,

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n) = \frac{1}{\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{i-1}}\right) \left(\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_2}, \dots, \frac{1}{g_{i-1}}, 0, \dots, 0\right)}$$

En este caso, en el inicio de cada periodo el bosque sólo tendrá árboles hasta la clase $i - 1$, todos los demás desaparecerán.

Una segunda interpretación de la solución es la siguiente: el numerador del cociente que forma la condición para maximizar el ingreso tiene p_i valor de un árbol de la clase i , en el denominador aparecen g^j s. Es precisamente la forma de cómo es dicha condición de maximización donde se precisan las recomendaciones de corte normativo.

Se ha mostrado que el mantenimiento de una estructura de bosque sustentable, donde su cultivo es obtener el ingreso máximo, depende de los valores del conjunto de las clases. La posibilidad de determinar una estructura del bosque se define por el manejo de una política de precios. Si quienes detentan el poder sobre las decisiones en el manejo del bosque, logran incidir sobre los precios de cada clase, ellos tienen también la capacidad de determinar su estructura. En otros términos, una política de precios puede determinar la sustentabilidad de un bosque y garantizar que los árboles cortados arrojen el máximo ingreso posible.

Un caso es incidir en una política de precios donde la condición de maximización del ingreso máximo se logra en la última clase, es decir,

$$\frac{p_n}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{i-1}}} \geq \frac{p_j}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{j-1}}} \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

En este caso, obtener el ingreso máximo se realiza cuando son cortados todos los árboles de la última clase, ello garantiza la existencia de todas las clases anteriores. Por ello, tanto el ingreso máximo como la estructura del bosque que se preserva periodo a periodo es,

$$I_{max} = p_n c_n = \frac{p_n s}{\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{n-1}}}$$

y

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n) = \frac{1}{\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \dots + \frac{1}{g_{i-1}}\right) \left(\frac{1}{g_1}, \frac{1}{g_2}, \dots, \frac{1}{g_{i-1}}, \frac{1}{g_1}, \dots, \frac{1}{g_{i-1}}, 0\right)}$$

CONCLUSIONES

1. La depredación del bosque mexicano tiene su base en los altos ingresos que se tienen por su explotación, lo cual se realiza a la sombra de las instituciones existentes.
2. Si las condiciones naturales y las provocadas por el hombre no alteran la manera como crece una especie, la sustentabilidad depende fundamentalmente de una política de reforestación.
3. Mantener la estructura del bosque periodo a periodo, considerando el criterio de obtener el máximo ingreso por su explotación, se logra mediante una adecuada política de precios. Lo anterior parte de que los precios son fijados por quienes son responsables de cultivar los bosques.
4. Los supuestos y características necesarias requeridas en el concepto de sustentabilidad, implica una forma organizativa social, económica y política que endógenamente determine, de manera social, la preservación de los recursos naturales, es la hipótesis más fuerte para explicar el funcionamiento del modelo. Se requiere la simbiosis entre los intereses que persigue el conjunto de comunidades y los políticos, donde se pierde la línea entre unos y otros.

ANEXO
Mapas sobre la situación forestal en México

MAPA 1



MAPA 2

