Aplicación de algunos modelos matemáticos a la toma de decisiones

Ana Elena Narro Ramírez*

Introducción

El tomar decisiones es una tarea a la que nos enfrentamos continuamente en virtud de que prácticamente todas nuestras acciones son precedidas por una decisión. Sin embargo, la mayor parte de estas decisiones se toman basándose en la intuición. No obstante, antes de decidir sobre algún asunto importante es indispensable realizar un análisis de las posibles alternativas. Este análisis debe ser más cuidadoso cuanto más importante sea la consecuencia de la decisión.

En ocasiones, el resultado de una decisión equivocada es tan drástico que puede causar angustia el tener que decidir, y es deseable poder auxiliarse de algún instrumento que facilite la elección de la mejor alternativa.

*** Departamento de Política y Cultura, UAM-Xochimilco.**

Ahora bien, la matemática proporciona numerosos instrumentos que apoyan esta tarea. Entre ellos se puede mencionar el uso de los modelos que permiten un mejor análisis de la situación. Si bien los modelos utilizan el lenguaje matemático para lograr esta representación, también suministran un consejo sobre la mejor decisión indicando cuál será el resultado obtenido en caso de seguir la indicación.

Entre los modelos que utilizan lenguaje matemático se pueden mencionar los modelos de programación matemática. En torno a la palabra *programación* se puede afirmar que se usa comúnmente para referirse a las actividades que se van a llevar a cabo. Aunque en este caso, *programación* significa elegir la mejor combinación de valores de las variables que intervienen en el programa, y lo de *matemática* se debe a los instrumentos utilizados para hacer la selección.

Con frecuencia, la selección de una alternativa incluye satisfacer varios criterios al mismo tiempo. Justamente ésta es la estructura de los modelos que se presentan a continuación. En donde se incluyen variaciones sobre el tipo de funciones que se utilizan, lineales o no lineales; así como los tipos de variables que intervienen, enteras o reales; también del número de objetivos por alcanzar, uno o varios; y por último, en torno al número de decisiones sobre la misma variable que requiere el problema, una o varias.

Aquí se pretende mostrar la existencia de algunos de los instrumentos matemáticos que ayudan a encontrar la solución de muchas situaciones problemáticas y que no son usados por desconocimiento por parte de los posibles usuarios.

I. Modelos matemáticos.

Resolver un problema real generalmente es muy complicado y no se sabe por dónde empezar. Esto se debe, entre otras cosas, a que los elementos que en él intervienen son numerosos. También influye que las relaciones entre estos elementos no son evidentes. Por consiguiente, es difícil expresar el problema en forma clara. ¿Cómo podría encontrarse la solución de un problema que no se comprende?

Una forma de abordar un problema es la siguiente: primero, descubrir sus componentes. A continuación, elegir entre ellos los elementos más importantes, desechando aquellos que no juegan un papel preponderante. Después, buscar las relaciones entre estos elementos. Por último, seleccionar algunos objetos o símbolos que permitan representar la situación simplificada. A esta representación del problema se le denomina: *modelo.*

La naturaleza del modelo construido depende de los elementos que se elijan para conformarlo. El modelo puede ser un dibujo, una fotografía, un mapa, una gráfica, una red, etc., o expresiones matemáticas.

Al representar en forma matemática los elementos y relaciones que intervienen en un problema, se tienen algunas ventajas: permite la utilización de los instrumentos matemáticos ya desarrollados en la consecución de una solución y proporciona una manera sistemática, explícita y eficiente de encontrarla. Asimismo permite evaluar distintas soluciones factibles y tomar la mejor decisión. También es útil para predecir y comparar el comportamiento de la situación representada frente a diferentes alternativas o en diferentes momentos.

En los países desarrollados la utilización de modelos para la toma de decisiones se ha generalizado. Son usados tanto por las empresas, los hospitales, las instituciones financieras, las bibliotecas, como en la planeación urbana, en los sistemas de transporte y aun en criminología.

Es urgente que también en nuestro país sea difundido su uso. En este momento de crisis económica, es importante más que nunca, encontrar soluciones a problemas que en otros países ya han sido resueltos de manera eficiente usando estos instrumentos: cómo minimizar los gastos sin descuidar la calidad del servicio o producto que ofrecen, cómo distribuir en forma más eficiente sus recursos, cómo seleccionar el plan de transporte más conveniente, etc.

La matemática aporta un gran número de modelos cuya solución puede obtenerse con facilidad a través de paquetes computacionales. Entre estos modelos pueden mencionarse: los de programación lineal, los de programación entera, los de programación no-lineal, los de programación dinámica y los de programación multiobjetivos.

Los modelos mencionados en el párrafo anterior corresponden a distintas versiones de una situación común. Todos son útiles en la representación de situaciones en las que se pretende encontrar los valores de las variables que maximizan o minimizan una de las relaciones conocida como función objetivo, respetando las demás relaciones.

II. Programación lineal

Posiblemente, entre los modelos disponibles, el modelo lineal es el más viable económicamente y el más flexible, debido a que existe una amplia variedad de paquetes computacionales que permiten encontrar las soluciones de un programa lineal. Además, estos paquetes se adquieren a precios razonables y no requieren un equipo computacional sofisticado.

Por las razones mencionadas, el modelo lineal ha sido amplia y exitosamente utilizado. En virtud de que lo han probado con éxito las industrias petrolera, automotriz, química, forestal, metalúrgica, agrícola, etc. También las instituciones financieras lo han manejado para resolver problemas relacionados con presupuestos y planeación, en administración de efectivo y en análisis de equilibrio. En algunas empresas la programación lineal se utiliza para optimar las mezclas de alimentos o productos químicos. Asimismo, en mercadotecnia se ha empleado para seleccionar los medios de publicidad y los canales adecuados de distribución. Algunas entidades gubernamentales lo han utilizado para minimizar los costos por el manejo de los desperdicios sólidos que contaminan el aire y el agua. Además ha tenido aplicación en las campañas políticas para determinar la mejor forma de distribuir el presupuesto disponible minimizando los costos y manteniendo la mayor cobertura a través de los distintos medios publicitarios a su alcance.

Sin embargo, la mayor limitante de este modelo es la linealidad de las funciones que intervienen. Esto se debe a que la relación lineal entre las variables es una relación muy sencilla para que concuerde frecuentemente con la complicada realidad. No obstante, en ocasiones, las propiedades físicas del problema permiten justificar esta linealidad. Otras veces, las relaciones no lineales pueden linealizarse fácilmente aplicando transformaciones matemáticas apropiadas.

Otra suposición importante en este modelo es aquella que asegura que todos los datos se conocen con certeza, condición que no concuerda con la frecuente necesidad de tomar decisiones con base en fenómenos asociados con la incertidumbre. Por ejemplo, si en la actualidad se manejan costos o precios, no se tiene la certeza de que al día siguiente sean los mismos que hoy, si cambian entonces el modelo tiene que modificarse para que siga siendo válido.

La forma general del modelo de programación lineal es:

$$Max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad para: \ i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0$$

La interpretación de este programa lineal es la siguiente:

Se desea encontrar los valores de las n variables x_i, para i desde 1 hasta n, que permitan que la función llamada objetivo: c, x, +...+ c_n x_n (representada arriba en forma resumida) alcance el máximo valor, respetando las desigualdades a_i, x, +...+ a_{in} x_n menor o igual que el recurso b_i, en donde cada i, desde 1 hasta m, se refiere a las restricciones, donde x_i mayor o igual que cero establece que las variables no pueden tomar valores negativos.

El programa también puede ser un programa de minimización y las desigualdades o restricciones pueden ser de: > > = (mayor, mayor o igual, o igual a).

A pesar de las limitaciones mencionadas, hay situaciones que pueden ser representadas mediante un modelo lineal con la suficiente exactitud para que sus resultados sirvan de apoyo para tomar una decisión. Así, mediante un programa lineal es posible seleccionar la mejor estrategia para el candidato de algún puesto político de elección popular, si se evalúan adecuadamente los resultados de las diversas estrategias disponibles, para él y sus contrincantes, en términos de votos ganados o perdidos.

Estudio de un caso.

Dos políticos están compitiendo entre sí por la gubematura de un estado de la república. Ambos individuos deben formular estrategias para los dos últimos días de campaa, los cuales se espera que sean decisivos debido a lo cerrado de la situación. Ambos políticos desean emplear estos días para hacer campaña en dos ciudades clave. Con el fin de evitar el desperdicio de su tiempo, planean viajar por la noche y pasar un día completo en cada una de las ciudades, o bien los dos días en una de ellas. Sin embargo, los arreglos deben hacerse con anticipación y ninguno de los dos políticos tiene acceso a los planes del otro. Cada uno de los políticos ha pedido a su director de campaña, en cada una de las ciudades, que valore el Impacto (en términos de votos ganados operados) de ¡as diversas combinaciones posibles de días pasados allí por él o por su oponente. A partir de esta información, cada político elegirá su mejor estrategia con respecto a la manera de usar estos días.

Esta elección puede hacerla apoyándose en un programa lineal, que como resultado arroje justamente la estrategia más aconsejable y el número de votos ganados o perdidos cuando se sigue.

El método que se utiliza para resolver un programa lineal, supone que todas las variables son continuas y generalmente proporciona soluciones no enteras. Cuando las variables de decisión son personas, automóviles, unidades de producción u otras variables que no pueden subdividirse, la solución del programa lineal, generalmente, no puede usarse en forma directa, debido a que el redondeo de una solución óptima es peligroso, puesto que no hay garantías de que la solución que resultara fuera óptima o factible.

III. Programación entera

Programación entera es el nombre que recibe un conjunto de técnicas disponibles para encontrar la mejor solución entera posible para un problema de programación lineal.

La diferencia entre un modelo lineal y uno lineal entero, es la restricción de que algunas o todas las variables deben ser enteras. Es decir, el modelo entero lineal presenta además de las limitantes del modelo lineal la que corresponde a la integridad.

Cuando sólo algunas de las variables exigen la integridad el modelo se llama mixto.

Sin embargo, a pesar de que el modelo entero es similar al lineal, la dificultad que éste presenta es superior a la que se encuentra en el manejo de un programa lineal. Puesto que para encontrar la solución de un programa entero es necesario utilizar un proceso de búsqueda en el que en cada paso debe aplicarse el proceso de solución de un problema lineal.

Así, el manejo de un programa entero resulta tanto más complejo y más costoso cuantas veces sea necesario repetir el proceso. A pesar de esto, la dificultad queda salvada con la existencia en el mercado de paquetes computacionales comerciales que realizan este trabajo de búsqueda de la mejor solución entera existente.

La forma general del modelo de programación lineal entera es:

$$Max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

s.a.[1]:

[1] s.a. se lee: sujeto a.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \ , \quad para: \ j = 1, ..., m$$

$$con \ x_i \ entero \ para: \ r \leq i \leq s,$$

$$x_i \geq 0, \quad para: \ i = 1, ..., n$$

$$x_r \ , x_{r+1} \ ,..., \ x_s$$

La interpretación de este programa lineal entero es la misma que la correspondiente al programa lineal, sólo que los valores de las variables x_r, $x_{r+1}, \ldots, x_s$ deben ser enteros.

Un caso particular de este modelo es aquél en el que las variables sólo pueden tomar los valores 0 o 1. Esta forma especial del programa se utiliza, por ejemplo, para casos de asignación: se tienen n trabajadores y n tareas y se desea asignarlos de manera que el tiempo en el que se completen todas las tareas sea mínimo. Cuando la variable x_{ij} vale 1 significa que el trabajador i debe realizar la tarea j, cuando vale cero la tarea que conviene asignarle será otra. La búsqueda de solución para este modelo llamado booleano es menos engorrosa.

El modelo de programación lineal entera sirve para representar diversas situaciones. Así, utilizándolo es posible seleccionar la mejor estrategia para asignación de puestos entre un conjunto de solicitantes, la mejor localización para una nueva instalación de una compañía, el programa de producción de varios artículos, el mejor medio de transporte para la distribución de los artículos, entre otros.

Estudio de un caso.

En la tarde del 17 de agosto, la jefa de producción de una óptica, se preguntaba cómo surtir dos órdenes especiales recibidas hoy, para ser entregadas el primero de septiembre o antes si fuera posible.

La óptica es una pequeña empresa productora de lentes especializados para uso en instrumentos de alta precisión óptica. La firma ha iniciado actividades hace cinco años y durante este tiempo ha ganado reputación por su buen servicio y calidad. Las ventas han ido creciendo rápidamente, captando nuevos clientes de las comunidades científicas y militares, de manera que está empezando a alcanzar sus límites de capacidad.

Una de las dos órdenes recibidas esta tarde, proviene de la Defensa, cliente consuetudinario durante ios últimos dos años y había ordenado dos lentes ovales (especificación # 1-39-x) para ser entregados a más tardar el primero de septiembre. La orden actual solicita seis lentes adicionales del mismo tipo, para entregarlos al mismo tiempo.

La segunda orden procede de una corporación de científicos. Ellos también ordenaron un lente que ya había sido producido por la óptica, un lente redondo (especificación # 1-901-x). La orden actual requiere tantos lentes de este tipo como la óptica pueda tener listos para el día primero de septiembre.

El compromiso de la óptica es satisfacer la demanda sin tener ningún retraso.

Durante las últimas dos semanas de agosto, el tiempo de máquina disponible ha sido más escaso que de costumbre debido al número de órdenes confirmadas en proceso. La calendarización de las órdenes previamente programadas no puede alterarse sin justificación.

Se dispone de 56 horas de tiempo de máquina fuera de la calendarización. En suma, la orden de la Defensa de dos lentes ovales no había sido programada y debe realizarse dentro de estas 56 horas. Los lentes ovales requieren 8 horas de tiempo de máquina, mientras que los lentes redondos son un poco más sencillos y sólo requieren de 7 horas máquina. Cada lente oval se vende a 110 unidades monetarias sobre su costo de fabricación y cada lente redondo se vende 100 unidades monetarias arriba de su costo correspondiente.

La gerente decide formular un programa de programación lineal para determinar las cantidades por producir que maximicen la ganancia.

IV. Programación no lineal

Como ya se mencionó, en ocasiones un programa lineal no es el más adecuado para describir la situación sobre la que se desea tomar una decisión. Esto sucede cuando al menos alguna de las relaciones entre las variables es más compleja de lo que suele serlo en una relación lineal. Como por ejemplo, cuando se incluye una ecuación de costos en la que el costo de transporte es directamente proporcional a la cantidad de artículos, pero también es inversamente proporciona! a las dimensiones de cada artículo, o cuando el número de votos asignados a una estrategia depende de su calidad y el tiempo que se sostiene; entonces es necesario recurrir a otro tipo de modelos, los no lineales.

El modelo general de programación no lineal se expresa:

$$\text{Max } f(x)$$

$$\text{s.a.:}$$

$$g_i(x) \leq b_i \; y \; h_i(x) = 0, \; para: 0 \leq i \leq m$$

$$x \geq 0$$

$$g_i(x) \leq b_i \quad h_i(x)$$

En donde f(x) (función objetivo) es una función que desea maximizarse respetando las relaciones $g_i(x) < b_i$ (restricciones de desigualdad) y $h_i(x) = 0$ (restricciones de igualdad), para valores no negativos de la variable x.

Como en el caso del modelo de programación lineal, la función objetivo puede minimizarse en lugar de maximizarse y las restricciones de desigualdad pueden ser de > (mayor o igual). Cuando se añade la restricción de integridad para algunas de las variables el modelo se llama *programa no lineal entero.*

En general, la programación no lineal presenta mayores dificultades que la lineal. Aun en el caso de que todas las restricciones sean lineales y la función objetivo sea la única no lineal. No se dispone de un algoritmo que resuelva todos los problemas que se ajustan a este formato, pero se cuenta con paquetes como Gino y Gams que han sido utilizados con buenos resultados para la solución de este tipo de problemas. Es importante destacar que estos paquetes conducen a una solución aproximada, esto es, cercana a la óptima, pero esto es suficiente como apoyo a la toma de decisiones.

Estudio de un caso.

La ciudad en la que está localizado uno de los principales productores de acero, lo tiene como única fuente de empleo. La ciudad ha crecido y progresado con la compañía, la cual da empleo a los casi 50 000 residentes. Por lo tanto, la actitud de los habitantes de la ciudad ha sido: "Lo que es bueno para la compañía es bueno para la ciudad". Sin embargo, esto ha cambiado últimamente; la contaminación del aire no controlada de los hornos siderúrgicos de la compañía está arruinando la apariencia de la ciudad y poniendo en peligro la salud de los residentes.

Los accionistas descontentos convocaron a la elección de una nueva Junta Directiva de la compañía, con mayor visión. Los nuevos directores están dispuestos a seguir políticas socialmente responsables y han estado analizando con los funcionarios de la ciudad y grupos de ciudadanos lo que se debe hacer en relación con el problema de contaminación del aire. Juntos han establecido normas estrictas de calidad del are.

La junta de directores ha dado instrucciones al gerente para hacer que sus ingenieros determinen en qué forma lograr estas reducciones con la menor inversión.

Hay tres tipos principales de contaminantes que se vierten al aire, cuyas emisiones se tienen que reducir. Se han establecido nuevos topes para la emisión anual de cada uno de ellos.

La fabricación de acero tiene dos fuentes principales de contaminación: ¡os altos hornos para fabricar el arrabio y los hornos de hogar abierto para transformar el hierro en acero. En ambos casos, los ingenieros han decidido que los tipos más efectivos de métodos de abatimiento son: incrementar la altura de las chimeneas, usar filtros e incluir materiales limpiadores de alto grado entre los combustibles para los hornos. Todos estos métodos tienen límites tecnológicos sobre cuánta emisión pueden eliminar.

No obstante, pueden aplicarse los métodos a cualquier fracción de sus capacidades de abatimiento. Debido a que operan de modo independiente, las reducciones en ¡a emisión logradas por cada uno de los métodos no son afectadas sustancialmente por el hecho de que se apliquen o no los otros métodos.

Después de que se proporcionaron estos datos, se aclaró que ninguno de los métodos por sí solo puede lograr todas las reducciones requeridas. Por otra parte, combinar los tres métodos a toda su capacidad, sería prohibitivamente caro y sería mucho más délo adecuado. Como consecuencia, los ingenieros concluyeron que tendrían que usar alguna combinación de métodos, tal vez con capacidades fraccionadas con base en sus costos relativos. Además, debido a las diferencias entre los altos hornos y el hogar abierto, probablemente los dos tipos no deban usar la misma combinación.

Se realizó un análisis para estimar el costo anual total en el que se incurriría por cada método de abatimiento. Además de los gastos incrementados de operación y mantenimiento, también se consideraron los costos iniciales del método, así como cualquier pérdida resultante en la eficiencia de los procesos de producción. Este análisis condujo a las estimaciones de costo total, para usar los métodos a sus capacidades plenas de abatimiento, expresado a partir de funciones no lineales. También se determinó que el costo de usos menores de un método *es esencialmente proporcional a su capacidad fraccionaria. Por lo tanto, para cualquier fracción dada que se use, el costo anual sería el de la fracción de la cantidad correspondiente.*

El determinar la estructura general del plan de abatimiento de la contaminación consiste en la especificación de los tipos de métodos de abatimiento que se usarán y qué fracciones de sus capacidades de abatimiento, esto es, la combinación de métodos que permite satisfacer los requerimientos al menor costo posible.

V. Programación por objetivos

Como puede observarse, la estructura de los modelos anteriores permite incluir sólo un objetivo que desea maximizarse (o minimizarse) respetando ciertas relaciones llamadas restricciones. Sin embargo, esta suposición no siempre es realista. Con frecuencia las organizaciones están interesadas en alcanzar varias metas a la vez. Por ejemplo: mantener utilidades estables, incrementar (o conservar) el porcentaje de mercado, diversificar los productos, mantener los precios de venta estables, mejorar la moral de los trabajadores y aumentar el prestigio de la compañía.

El modelo correspondiente a un programa por objetivos proporciona la posibilidad de representar esta situación y encontrar una solución para ella.

La construcción de este modelo se basa en la idea de establecer una meta numérica para cada uno de los objetivos que se desean alcanzar, formular una relación que represente cada objetivo y buscar una solución que minimice la diferencia entre el valor de cada función objetivo expresada como relación entre las variables y la meta que se desea alcanzar.

Este modelo es similar a los anteriorers. Consta de una función objetivo que desea minimizarse: la suma de las desviaciones a las metas. También intervienen en este modelo restricciones, pero ahora son de dos tipos: unas son las restricciones objetivo acotadas por las cantidades "meta" y las otras son las restricciones del recurso, que son las mismas que aparecen en los modelos anteriores. El programa resulta lineal cuando todas las relaciones son lineales. Pero cuando alguna de las funciones que intervienen es no lineal, el modelo se convierte en un modelo de programación no lineal. De la misma manera, si algunas de las variables deben ser enteras, entonces el modelo es lineal entero o no lineal entero, según el caso.

Existen dos tipos de modelos con esta estructura: el primero es aquél en el que se suponen igual de importantes todos los objetivos y se llama *programa por objetivos sin prioridades* y aquél en el que se le concede diferente importancia a cada objetivo y para reflejar estas prioridades se le asigna un peso distinto a cada desviación que aparece en la función objetivo del programa correspondiente.

Una vez planteado el problema bajo el formato general de la programación, se resuelve usando el mismo método que se utiliza en el caso de la programación de un solo objetivo correspondiente.

Las restricciones de recurso que se manejan en la programación de un objetivo, se consideran inviolables, de manera que si aparecen dos restricciones contradictorias el problema no es factible. Sin embargo, en el programa por objetivos no es necesario que las restricciones se satisfagan, sólo es deseable que se cumplan. Esto es, más que restricciones pueden ser manejadas como propósitos, cada uno con diferente prioridad, por lo que se permiten desviaciones en cualquiera de los dos sentidos para su cumplimiento.

Existen cuatro formas de restricciones objetivo, según se permita la variación hacia abajo, hacia arriba, ambas o ninguna.

La forma general del modelo de programación lineal por objetivos es:

$$Min \sum_{i=1} (p_i f_i + q_i s_i)$$

s.a.:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j , \quad para: j = 1,..., m$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ik} x_i + f_k - s_k \leq M_k \quad , \quad para: k = 1,..., \text{número de objetivos}$$

$$x_i , f_k , s_k \geq 0 \quad , \quad para: i = 1,...,n \; , \; k = 1,..., \quad \text{número de objetivos}$$

donde p_i es el peso asignado a la cantidad f_i que falta para alcanzar la meta M_i; q_i es el peso asignado a la cantidad S_i que le sobra a la meta M_i. Se desea minimizar la suma de desviaciones con pesos que reflejan su importancia. M_k es el valor asignado al objetivo k.

Estudio de un caso.

La gerente administrativa está preparando el presupuesto para el próximo año. Se emplea a 270 personas, algunas de tiempo parcial, con 10 distintas categorías. Los salarios son el gasto mayor. Otros costos corresponden a reemplazo de equipo y material. La gerente desea conceder un aumento de salarios siempre que los costos por producto no aumenten excesivamente.

Se convocó a una reunión de directivos de la que resultó una lista de objetivos por alcanzar el próximo año, por orden de importancia:

1. Limitar el aumento del costo por producto terminado.
2. Alcanzar el punto de equilibrio.
3. Minimizarla subutilización de las horas de trabajo del personal.
4. Proporcionar aumentos de salarios del 7% para las categorías de 1 a 5, con distintas prioridades para cada una de las categorías..
5. Tener un fondo para reemplazo de equipo.
6. Dar un aumento del 5% a las categorías de 6 a 10 con diferentes prioridades por categoría.

VI. Programación dinámica

Los modelos anteriores no resultan útiles en el caso de que el problema que se desea resolver requiera de tomar varias decisiones para optimar una función objetivo. En este caso es necesario recurrir a otro modelo llamado *modelo de programación dinámica.*

El nuevo modelo mencionado requiere que el problema se pueda descomponer en problemas más simples que se resuelven tomando una sola decisión en cada uno.

Las características de un problema de programación dinámica son las siguientes:

1. Se puede dividir en etapas que requieren de una política de decisión en cada una de ellas. Cada etapa corresponde a una toma de decisión.

2. En cada etapa existe un número finito de estados asociados. Los estados son las distintas condiciones posibles en las que puede encontrarse el sistema en cada etapa del problema.

3. El efecto de la política de decisión es la transformación del estado actual en un estado asociado con la siguiente etapa.

4. El procedimiento de solución está diseñado para encontrar la política óptima para el problema completo, es decir, recomienda las decisiones de la política óptima en cada etapa para cada uno de los estados posibles.

5. Dado el estado actual, una política óptima para las etapas restantes es independiente de la política adoptada en etapas anteriores. El conocimiento del estado actual del sistema expresa toda la información sobre su comportamiento anterior, y esta información es necesaria para determinar la política óptima de allí en adelante.

6. El procedimiento de solución se inicia al encontrar la política óptima para la última etapa. La política óptima para la última etapa incluye la decisión óptima para cada estado en esa etapa. Es común que la decisión de este problema de una etapa sea trivial.

7. Se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima para la etapa n, dada la política óptima para la etapa n+1.

8. Cuando se usa esta relación recursiva, el procedimiento de solución se mueve hacia atrás etapa por etapa, encontrando cada vez la política óptima para esa etapa, hasta que se encuentra la política óptima desde la etapa inicial.

También existen paquetes para la solución de programas dinámicos, uno de ellos es el MODSIM, que utiliza programación dinámica y simulación.

Este es el modelo que presenta mayores dificultades, tanto para su construcción como para su solución, pero es el único entre los mencionados que maneja una situación que cambia con el tiempo, por etapas, característica que hace necesaria una decisión en cada etapa.

La forma general del modelo de programación dinámica es:

$$J_k(x_i) = Min \left[f_k(x_i) + J^*_{k+1} \ (x_{i+1}) \right]$$

donde $J_k(x_i)$ *es el* min de *la etapa k a la última* *partiendo del estado* x_i *y* J^*_{k+1} (x_{k+1}) *es el* min *de la*

etapa k + 1 *a la ultima partiendo del estado* x_{i+1}

¿Por qué no intentar aplicar este método para tener una orientación acerca de la solución de alguno de los problemas por los que atraviesa hoy el país, proponiéndose una meta por alcanzar en la última etapa de planeación y a partir de ella, hacia atrás, en cada etapa, ir marcando las acciones que conduzcan a la consecución de esta meta, para cada uno de los posibles estados en que pueda encontrarse el país?

Estudio de un caso.

Una compañía planea introducir un nuevo producto al mercado y tendrá que competir con productos importados, por lo que va a ser necesario planear cuidadosamente la estrategia de mercadeo. Además, sus recursos están restringidos por la difícil situación económica actual. Después de una reunión con la junta directiva, se tomó el acuerdo de lanzar el producto en tres fases: la primera consiste en una oferta de introducción, ofreciendo el producto a un precio muy reducido con el objeto de atraer a los primeros compradores. La segunda consiste en una campaña intensiva de publicidad para persuadir a estos primeros compradores a que sigan comprando el producto a pesar de que ya se ofrecerá a precio normal. Tienen conocimiento de que para entonces, más o menos para el final de esta segunda fase, aparecerá en el mercado un nuevo producto de importación, semejante al que están planeando lanzar. Para contrarrestar la competencia, la fase tres consistirá en reforzar la publicidad y reducir el precio, para tratar de evitar que compradores regulares cambien hacia el nuevo producto.

El problema que queda por resolver es el de cómo distribuir el recurso limitado, destinado a la introducción de este producto entre las tres fases de mercadeo con el objeto de maximizar la participación final en el mercado para el nuevo producto. Se cuenta con los resultados de un estudio que proporcionan una relación entre el dinero invertido en cada fase y la participación lograda en el mercado.

Conclusión

En la realidad hay muchas situaciones que pueden representarse y resolverse con los modelos planteados. Por ejemplo, un corredor de bolsa que trata de maximizar el rendimiento sobre los fondos invertidos, pero las posibles inversiones están regidas por las leyes y las políticas bancarias. También puede apoyarse la planeación que debe hacer un hospital de las comidas para los pacientes que deben satisfacer ciertas condiciones sobre sabor, propiedades nutritivas, tipo y variedad, al mismo tiempo que se trata de minimizar el costo. De la misma manera se puede mejorar la planeación de una producción a futuro si el fabricante busca un costo mínimo satisfaciendo la demanda, respetando la capacidad de producción, manteniendo el nivel de inventario adecuado tomando en cuenta la mano de obra y la tecnología disponibles.

Sin embargo, hay muchos otros modelos matemáticos disponibles acompañados de apoyo computacional que permite resolverlos con relativa facilidad. Estos modelos son útiles para representar otro tipo de situaciones. Por ejemplo, las situaciones conflictivas pueden representarse con modelos utilizados en teoría de juegos.

Los modelos usados en teoría de juegos permiten obtener las diversas estrategias existentes para los contrincantes, así como los resultados esperados con las diferentes combinaciones de estrategias y la estrategia más conveniente para cada jugador.

Las situaciones en conflicto aparecen con frecuencia. Las guerras son los conflictos por excelencia, pero también lo son los encuentros deportivos, los negocios, las contiendas políticas, etc. Todas estas situaciones se pueden modelar con estos instrumentos.

En un futuro, posiblemente se presente la oportunidad de escribir un pequeño artículo sobre estos modelos y su aplicación.