Propuestas de lógica difusa para la toma de decisiones

Laura Patricia Peñalva Rosales*

L os modelos para la toma de decisiones que pretenden incluir elementos de tipo cualitativo aportados *por el lenguaje natural, han sido trabajados desde hace algún tiempo bajo los conceptos de la Lógica Difusa, planteada por Zadeh en 1965; sin embargo, no son aún lo suficientemente conocidos en nuestro ámbito para probar en la práctica su capacidad. En este escrito se ejemplifican algunas de las propuestas de modelos surgidas bajo este enfoque: la toma de decisiones individual, la configuración de decisiones grupales a partir de opiniones individuales y la obtención del orden preferencial de alternativas de solución, todas las cuales cumplen con un conjunto requerido de condicionantes.*

Introducción

Si bien es amplio el trabajo de formalización hecho alrededor de la toma de decisiones y también se han abordado las múltiples variantes que la misma presenta en cuanto a número de objetivos, criterios, decisores y pasos, los modelos que pretenden incluir elementos de tipo cualitativo aportados por el lenguaje natural no son aún ampliamente conocidos

* **Profesora-investigadora del Departamento de Producción Económica, UAM-X**

en nuestro ámbito, en cuanto a su capacidad de modelación. He aquí que nos encontramos ante una metodología que merece nuestra atención por los resultados favorables de su aplicación que han sido reportados en diversos campos de la gestión de empresas (Gil Aluja; 1996; SIGEF; 1996).

En este escrito se ejemplifican algunas de las propuestas de la lógica difusa para modelar la toma de decisiones con el uso de elementos de tipo cualitativo. Se presenta, primero, la situación más usual en la toma de decisiones (la individual) con elementos de decisión de tipo cualitativo modelados a través fuzzy sets. En seguida, la ejemplificación de cómo se configuran decisiones grupales a partir de las opiniones individuales. Finalmente, cómo se obtiene el orden preferencial de las alternativas de solución que cumplen un conjunto de características.

Justificación

La importancia de la toma de decisiones para la administración y gestión de las empresas ha provocado diversas propuestas para formalizar su tratamiento.

Muchas de las metodologías empleadas para ello incluyen el manejo de la incertidumbre a partir de modelos de tipo estadístico. Sin embargo, el uso de términos como imprecisión y vaguedad para la descripción de situaciones de decisión, ha llevado a algunos autores (Ostasiewicz; 1996) a reflexionar sobre el verdadero significado de estos términos. Su conclusión es que mientras el término *incertidumbre* se refiere a la falta de conocimiento sobre cómo se comporta el mundo real y cuándo hay un cambio en su comportamiento, el término *imprecisión* refiere más bien una falta de capacidad instrumental para medir con exactitud, y el término *vaguedad* refiere una falta de definición precisa de los términos (lingüísticos, simbólicos, gráficos, etc.) usados para describir el mundo real.

La explicación que dan respecto a esto último es que si nuestros sistemas representacionales, particularmente nuestro lenguaje, están llenos de términos vagos es porque nuestro cerebro parece trabajar más con los conceptos que agrupan y distinguen los múltiples datos que llegan a él ante una situación dada que directamente con números asociados a variables medibles.

La lógica difusa surge como una propuesta consistente con esta idea sobre cómo trabaja el pensamiento humano.

Si el trabajo del cerebro se dirige más a trabajar conceptos que números, resulta contradictoria la clasificación booleana que hacemos de las medidas tomadas sobre los objetos en estudio, al ubicarlas o no, sin ninguna otra opción, dentro de algún clase, conjunto, categoría o concepto. La teoría de los *fuzzy sets* reconoce y permite expresar que una medida realmente presenta transiciones graduales entre la membresía y no membresía a un conjunto. Esta teoría formaliza mediante la llamada "función de membresía" el grado de compatibilidad existente entre un valor observado y el concepto al cual se asocia.

Diversas propuestas se han presentado para usar elementos de la teoría de los *fuzzy sets y* lógica difusa asociada (Zadeh; 1965); y en los modelos de toma de decisiones (Spillman: sf ; Yager: sf; Kacprzyk; 1986; Bellman y Zadeh; 1970). Así, se han desarrollado modelos para la toma de decisiones bajo multicriterios, multiestados, formación de consenso en grupos, y otros, algunos de los cuales enseguida presentaremos.

Modelos *fuzzy* ***pata*** la toma de decisiones

A) *Toma de decisiones individual*

El proceso básico de toma de decisiones consiste en evaluar un conjunto de alternativas ante la presencia de objetivos y restricciones relevantes. Si estos objetivos y restricciones se presentan en forma lingüística, pueden ser representados en términos de *fuzzy sets*, la decisión se determinará mediante una consideración conjunta o agregada de los mismos.

Ejemplo:

Supongamos que un individuo quiere decidir su voto por "el mejor" de cuatro posibles candidatos; *al, a2, a3* y *a4,* a un puesto de gestión universitaria. Su objetivo es escoger al candidato que ofrece "mejores condiciones de trabajo" con las restricciones de que tenga un "alto nivel académico" y "accesibilidad en el trato".[1]

[1] Estos conceptos resultan altamente subjetivos y dependientes del contexto individual, así que el decisor tiene libertad para definirlos en la forma que él los entienda.

Llamemos A al conjunto de posibles acciones o alternativas en discusión, G al de objetivos o metas y Cal de restricciones planteadas dentro de la situación de decisión.

Dentro del proceso de decisión, los posibles "estados de la naturaleza"[2] pueden ser definidos mediante las funciones

$$g : A \to X$$
$$c : A \to Y$$

que señalan, para cada alternativa a_i de decisión, los niveles que se alcanzan en los objetivos (X) y el grado en que se cumplen las restricciones (Y).

Si el objetivo de "mejores condiciones de trabajo" es considerado equivalente al posible aumento de sueldo al año, el objetivo se puede expresar entonces en términos monetarios, tomando como base el conjunto de alternativas A.

De esta manera, definimos una función g que asigna a cada candidato su valor de ventaja competitiva:

$$g(a1) = \$\ 4\ 000.00$$
$$g(a2) = \$\ 4\ 500.00$$
$$g(a3) = \$\ 5\ 000.00$$
$$g(a4) = \$\ 6\ 000.00$$

Si el "alto nivel académico" se mide de acuerdo al puntaje asignado por la comisión dictaminadora durante el último periodo reportado de actividades y productos de trabajo, el nivel de restricción puede definirse con la función c siguiente

$$c(a1) = 27\ 000$$
$$c(a2) = 7\ 500$$
$$c(a3) = 12\ 000$$
$$c(a4) = 2\ 500$$

[2] Este término es usado en la teoría de las decisiones para etiquetar los posibles escenarios futuros.

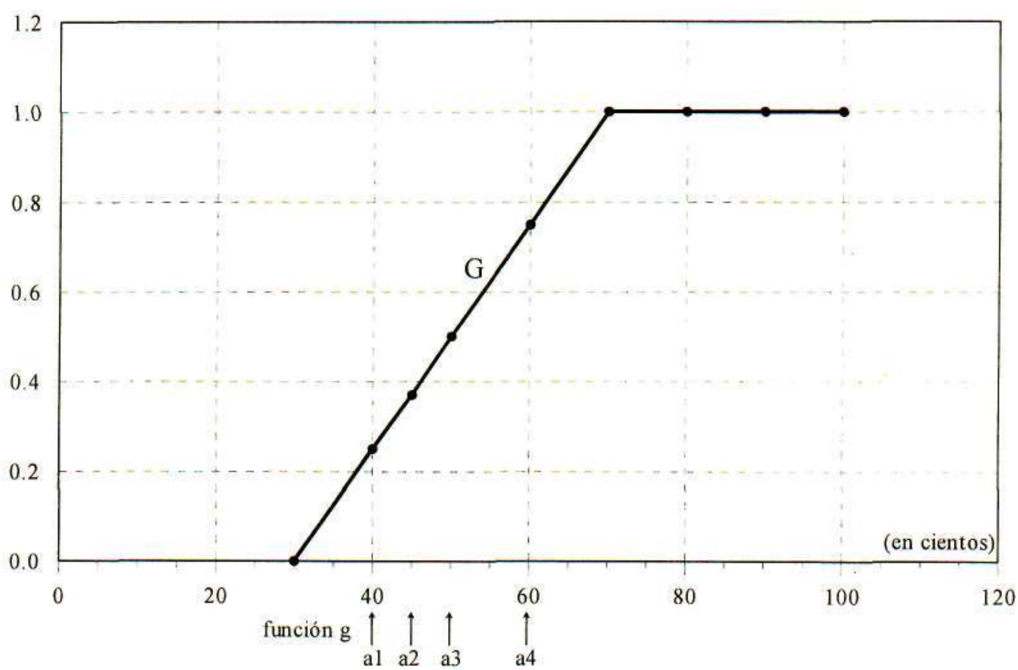
Los conjuntos *fuzzy* que representan objetivos y restricciones, planteados de manera lingüística, se construyen ahora mediante una composición de funciones.

$$\mu_G(g(a_i))$$
$$\mu_C(c(a_i))$$

Donde las nuevas funciones presentadas son las llamadas "funciones de membresía", que establecen el grado de concordancia de la medida con el concepto que representan.

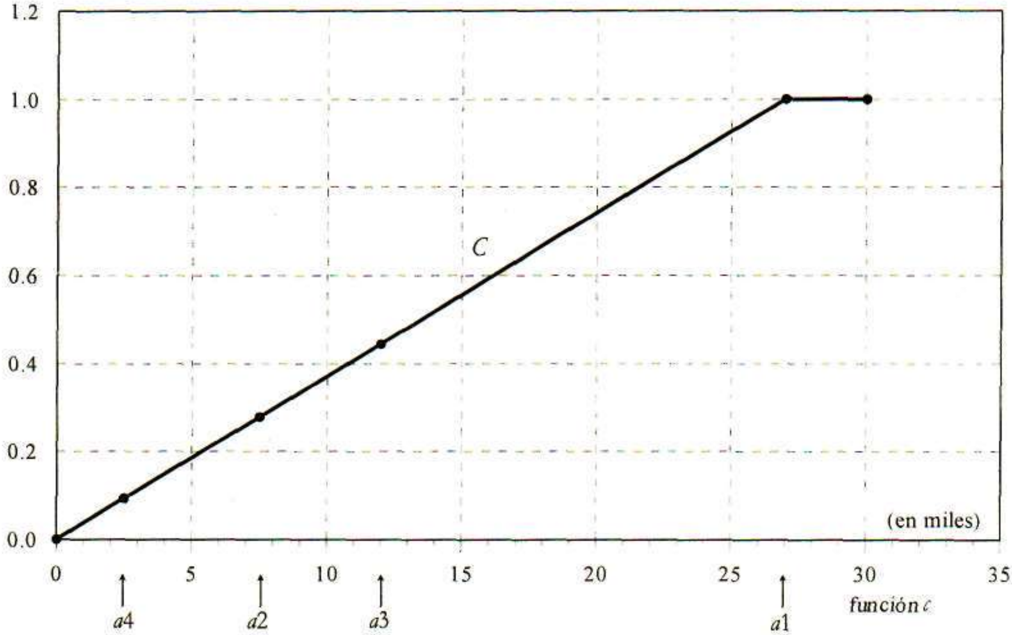
Así, considerando u_G (de la figura 1) como la función que representa el objetivo de "mejores condiciones de trabajo".

Figura 1
Objetivo *G*



y μ_C (de la figura 2) como la función que representa la restricción "alto nivel académico",

Figura 2
Restricción *C*



los conjuntos *fuzzy* respectivos son:

$$G = \frac{.25}{a_1} + \frac{.37}{a_2} + \frac{.5}{a_3} + \frac{.75}{a_4}$$

y

$$C = \frac{1}{a_1} + \frac{.27}{a_2} + \frac{.45}{a_3} + \frac{.1}{a_4}$$

Respecto a la segunda restricción que requiere que el candidato tenga "accesibilidad en el trato", ésta puede ser expresada directamente por el decisor al asignarles a cada uno de los cuatro candidatos una "calificación" (entre 0 y 1 para cumplir la característica de una "función de membresía") sobre este aspecto. Así, el conjunto *fuzzy C2* queda determinado por:

$$C_2 = \frac{.4}{a_1} + \frac{.6}{a_2} + \frac{.2}{a_3} + \frac{.2}{a_4}$$

En una situación así caracterizada por los conjuntos *fuzzy* *G*, *C*, y *C2*, una decisión *fuzzy* se concibe como un conjunto *fuzzy* en *A* tal que satisface simultáneamente las metas *G* y las restricciones *C y C2. Es* decir, en términos lógicos:

$$\mu_D = \mu_{G \wedge} \mu_{C \wedge} \mu_{C2}$$

En términos de conjuntos:

$$D = G \cap C \cap C2$$

Una solución al planteamiento hecho de esta manera, mediante conjuntos *fuzzy*, es establecida mediante el operador *fuzzy* de intersección:[3]

$$D = min\ [\inf_{i \in N_n} \mu_{G_i}(a), \inf_{j \in N_m} \mu_{C_j}(a)]$$

para toda a en *A*.

El resultado es una decisión expresada como un conjunto *fuzzy*. La mejor alternativa, única y nítida, se obtiene de este conjunto *fuzzy* mediante alguno de los métodos de "defuzzyfícación"[4] existentes.

B) *Configuración de consensos grupales*

Cuando la decisión tiene que tomarse entre varias personas, sabemos que las metas de los decisores individuales difieren y que cada uno de ellos tiene acceso a diferente

[3] Diversos son los *operadores fuzzy* de intersección propuestos, los más usuales son *mín*, como operador de intersección, y *máx* como operador de unión, ya que *1)* cumplen las propiedades fundamentales de las operaciones para conjuntos nítidos y *2)* pueden extenderse a cualquier número finito de conjuntos *fuzzy* , debido a su asociatividad. Además, cumplen los axiomas referidos a las *t*-normas y co-normas respectivamente.

[4] Como el llamado "método centrado en área". Estos métodos obtienen el valor nítido o "crisp", que representa al conjunto *fuzzy* en cuestión.

información sobre la cual basa su decisión, por ello, asignarán diferente orden preferencial al conjunto de alternativas que se les presentan como posible solución.

En este caso, dadas las preferencias de orden individuales, deberá hallarse el orden de preferencias que mejor satisfaga al conjunto decisor.

El grado de preferencia grupal de la alternativa a_i sobre la aj (su popularidad relativa) se puede calcular dividiendo el número decisores que prefieren ai sobre aj entre el número total de decisiores que emiten su opinión (esquema de voto mayoritario),[5] es decir:

$$R(ai, aj) = N(ai, aj)/n$$

Tenemos entonces a R como una función

$$R : A \times A \rightarrow [0,1]$$

podemos decir que está definiendo un conjunto *fuzzy S* en la forma

$$S = \sum \frac{R(a_i, a_j)}{(a_i, a_j)}$$

éste conjunta todos los pares que se pueden conformar con el conjunto total de alternativas y que presentan algún grado de pertenencia a la medida de preferencia grupal, es decir, es el conjunto de pares de alternativas que cumplen con algún grado de preferencia grupal.

Para cualquier valor

$$\alpha \, \varepsilon \, [0,1]$$

considerado como un determinado nivel de acuerdo entre los individuos del grupo

$$^{\alpha}S$$

No se consideran aquí los diferentes niveles de influencia ejercida por los individuos en el grupo.

llamado "alfa-corte" de *S,* conjunta el ordenamiento de pares que en el grupo alcanzó un grado de acuerdo mayor o superior al valor *alfa.*

En general, todo conjunto *fuzzy* es la unión de sus "alfa-cortes". La expresión

$$S = \cup_{\alpha \in [0,1]} \alpha .^{\alpha} S$$

indica que en este caso se debe considerar una unión ponderada de "alfa-cortes", toda vez que los pares de alternativas que lograron, por ejemplo, un nivel de acuerdo grupal de 0.75 deben considerarse de mayor importancia para la configuración del consenso que aquellos que lograron un nivel de acuerdo al 0.25. Sin embargo, todos ellos son consideradas.

Si se revisa cuáles de los ordenamientos totales (los que consideran a todas las alternativas), son compatibles con los pares establecidos en los "alfa-cortes" de *S,* en un proceso iterativo de intersección de "alfa-cortes", se obtendrá un valor de alfa para el cual existe un único ordenamiento compatible con la relación *R.*

Este valor representa el máximo nivel de consenso alcanzado en el grupo de acuerdo con las opiniones individuales, el ordenamiento compatible encontrado representa la decisión grupal.

Ejemplo

Cada individuo de un grupo de 8 decisores puede plantear un orden preferencial Pi sobre el conjunto de cuatro alternativas *A={a1,a2,a3,a4}* para elegir al "mejor" de los candidatos propuestos. Por ejemplo:

$$P1 = \{a1,a2,a3,a4\}$$
$$P2 = P5 = \{a4,a3,a2,a1\}$$
$$P3 = P7 = \{a2,a1,a3,a4\}$$
$$P4 = P8 = \{a1,a4,a2,a3\}$$
$$P6 = \{a4,a1,a2,a3\}$$

Sea O - {P1, *P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8}* el grupo de ordenamientos inicialmente propuesto por los decisores.

Utilizando el esquema de voto mayoritario, para contabilizar las preferencias manifiestas al comparar por pares las alternativas *a1,a2,a3,a4,* se configura la siguiente relación *fuzzy* de preferencia grupal:

Cuadro 1
Cuadro de preferencias del candidato *i* (renglón) sobre el *j* (columna)

	a1	*a2*	*a3*	*a4*
a1	0.0	.5	.75	.625
a2	.5	0.0	.75	.375
a3	.25	.25	0.0	.375
a4	.375	.625	.625	0

Los "alfa-cortes" para esta relación son:

$$^{1}S = \{\}$$
$$^{.75}S = \{(a1,a3), (a2,a3)\}$$
$$^{.625}S = \{(a1,a4), (a4,a2), (a4,a3), (a1,a3), (a2,a3)\}$$
$$^{.375}S = \{(a1,a2), (a2,a1), (a1,a4), (a4,a2), (a4,a3), (a1,a3), (a2,a3)\}$$
etc.

Se aplica ahora el procedimiento que permite llegar al ordenamiento único que constituye la elección del grupo:

Del conjunto original de ordenamientos propuestos, la intersección con los "alfa-cortes" irá discriminando aquellos que no cumplan con las restricciones señaladas por estos "alfa-cortes", de manera tal, que identificaremos grupos cada vez más reducidos de ordenamientos sobre los cuales el grupo de decisores está de acuerdo.

El "alfa-corte"

$$^{.75}S = \{(a1,a3),(a2,a3)\}$$

señala que a un nivel del .75 los decisores están de acuerdo en que es más apropiado el candidato *a1* que el *a3* y el candidato *a2* que el *a3* para ocupar el puesto, por ello el grupo de ordenamientos inicialmente propuesto queda restringido a

$$
\begin{aligned}
{}^{.75}O = \{&(a4,a1,a2,a3),\ (a1,a2,a3,a4),\ (a1,a4,a2,a3),\ (a1,a2,a4,a3),\ (a4,a2,a1,a3),\\
&(a2,a1,a3,a4),\\
&(a2,a4,a1,a3),\ (a2,a1,a4,a3)\}
\end{aligned}
$$

El siguiente "alfa-corte":

$$ {}^{.625}S = \{(a1,a4),\ (a4,a2),\ (a4,a3),\ (a1,a3),\ (a2,a3)\} $$

señala que el grupo de decisores está de acuerdo, a un nivel de .625, en que el candidato al es más apropiado que el candidato *a4*, y éste es más apropiado que el *a2* y que el *a3;* también se mantiene el acuerdo antes mencionado. Por ello, el grupo de ordenamientos sufre una nueva restricción, quedando como:

$$ {}^{.625}O = \{(a1,a4,a2,a3),\ (a1,a4,a3,a2)\} $$

Al considerar la intersección de los subconjuntos ${}^{1}0$, ${}^{.75}0$ y ${}^{.625}$, se obtiene el ordenamiento

$$ (a1,a4,a2,a3) $$

como la elección grupal que logra un nivel de acuerdo con valor 0.625.

C) *Selección de alternativas de acuerdo al grado de cumplimiento de características determinadas*

Sea *C={C1, C2, ..., Cn)* la referencia de cualidades (características) que requieren cumplirse dentro del perfil de un puesto de trabajo.

Una manera de considerar el grado en que una alternativa dada cumple con cada característica es representarlo mediante un conjunto borroso *Ci,* con función de membresía

$$ \mu_{C_i} : A \rightarrow [0,1] $$

La asignación de valores de membresía al conjunto borroso pueden ser establecidos de acuerdo con una correspondencia semántica como la siguiente (Gil Aluja: 1996):

/ totalmente competente
.9 competente
.8 prácticamente competente
.7 casi competente
,6 bastante competente
.5 medianamente competente
.4 bastante incompetente
.3 casi incompetente
.2 prácticamente incompetente
.1 incompetente
0 totalmente incompetente

Se considera para la calificación de los candidatos un intervalo, al cual llamaremos "intervalo de competencia ideal":

$$[x,1] \quad con\ 0 \leq x \leq 1$$

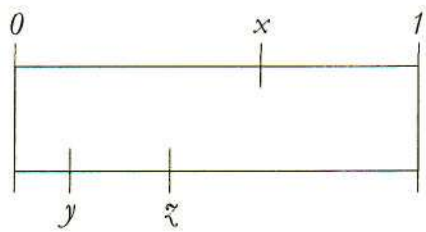
donde x en el extremo izquierdo considera la calificación mínima requerida para la característica que se está evaluando y el valor /, en el extremo derecho, índica el cumplimiento cabal de la característica.

A todo candidato se le podrá asignar una calificación intervalar que lo califique respecto a su grado de cumplimiento de tal o cual característica; este intervalo se puede denominar

$$[y,z] \quad con\ 0 \leq y \leq z \leq 1$$

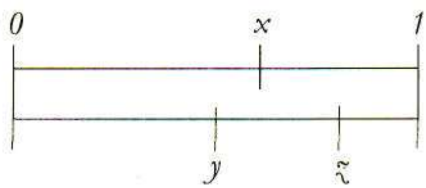
Para cualquier candidato, es posible encontrar 3 posibles situaciones de calificación al puesto:

Situación 1: el intervalo de competencia del candidato queda por debajo del requerido para el puesto, gráficamente:



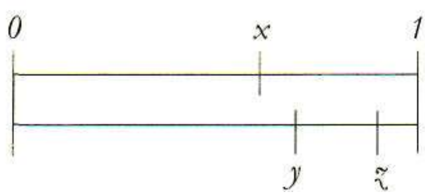
$$0 \leq y \leq z \leq x \leq 1$$

Situación *2:* existe una cierta concordancia (traslape) entre el intervalo de competencia del candidato con el ideal requerido para el puesto:



$$0 \leq y \leq x \leq z \leq 1$$

Situación *3:* el intervalo de competencia del candidato está totalmente comprendido dentro del ideal del puesto a cubrir.



$$0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$$

Se establece el cálculo de un "índice de concordancia" que señala, en escala de 0 a 1, cuál es el grado o medida de la intersección entre los intervalos $[x,1]$ y $[y,z]$.

Tal índice se calcula en la forma general:

$$\eta\,([x,1],[y,z]) = \begin{cases} 0 & si \;\; y < z \quad y \quad z = 1 & Situación\ 1 \\ \dfrac{z - x}{1 - y} & si \;\; y \leq x \quad y \quad x \leq z \quad y \quad x \neq 1 & Situación\ 2 \\ 1 & si \;\; x \leq y \quad y \quad y \leq z & Situación\ 3 \end{cases}$$

La competencia real del candidato en relación con la lista de características requeridas por el puesto, se puede calcular mediante el promedio de los valores obtenido para los índices de concordancia de todas y cada una de las características, y se denomina "índice de competencia".

Ejemplo

Consideremos las calificaciones que se dan a cada uno de los 4 candidatos al puesto de gestión universitaria, que hemos venido presentando en los ejemplos anteriores.

	C1	*C2*	*C3*	*C4*	*C5*	*C6*
a1	.4,.5	.8	.6,.7	.3,.5	.4	.3
a2	.2,.3	.7	1	.2,.4	1	.1,.2
a3	0	.6,.9	.6	.8,1	.4,.5	0,.2
a4	.9,1	.8	.7,1	.2,.5	1	.2,..6

Una vez establecidos los intervalos de competencia idónea para cada característica como:

C1 : 0.3,1
C2 : 0.7,1
C3 : 0.9,1
C4 : 0.4,1
C5 : 1,1
C6 : 0.2,1

La fórmula anterior, que especifica el cálculo del índice de competencia, permite establecer como orden preferencial de candidatos:

A4, con índice 0.743056
A1, con índice 0.523809
A2, con índice 0.5
A3, con índice 0.25

Con esto terminamos la ejemplificación de lo que la lógica difusa ofrece para el tratamiento de factores de tipo cualitativo que intervienen en los procesos de toma de decisiones.

Mucho más hay que estudiar, por ejemplo, sobre el tratamiento de cuantificadores lingüísticos ("la mayoría", "pocos", "muchos",etc); los niveles de influencia que ejercen las opiniones individuales en los grupos de decisión, etcétera. Otros métodos *fuzzy* consideran ya estas situaciones. Existen también métodos que manejan niveles jerárquicos de decisión.

Los modelos existentes se han creado generalmente para un tipo de situación particular, en realidad se requiere una mezcla de ellos para manejar una situación real.

Conclusiones

- La información usada por estos métodos no requiere, como en otros, ser perfectamente estructurada, lo cual coincide con lo que encontramos en algunas situaciones de decisión.
- La escala lingüística usada permite expresar con mayor flexibilidad las apreciaciones y preferencias de los propios decisores y de los individuos que aportan información sobre las alternativas.
- La mayoría de los métodos existentes se enfocan en forma exclusiva al tratamiento de variables cuantitativas, pero aun éstas pueden ser calificadas en escalas lingüísticas y tratadas de manera más sencilla y a la par de las variables cualitativas.
- Los cálculos necesarios en esta metodología se pueden realizar en un sencillo software tipo "hoja de cálculo", lo cual facilita su aplicación.

Bibliografía

Bellman R.E. y L.A. Zadeh. "Decision-making in a *fuzzy* environment", en *Management Science*, pp. B 141 - B164/ 17, 1970.

Dubois, Didier J. *FUZZY sets and systemr*. Academic Press, Londres/ EE UU, 1980.

Gil Aluja, Jaime, *ha gestión interactiva de los recursos humanos en la incertidumbre:* Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1996.

Kacprzyk, Janusz. "A 'down-to-earth' managerial decisión making vía a yk^y-logic-based representation of commonsense knowledge", en *Artificial Intelligence in Economics and Management.* L. F. Pau, editor/Elsevier Science Publishers, North Holland, 1986, pp. 57-64.

Klir, George J. & Bo Yuan. *Fu^y sets and Fu^jy logic (Theory and Applications):* Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, Nueva Jersey, 1995.

Ostasiewicz, Walenty. "Some philosofical aspects *oífu^y* sets", en *Fu^y Economic review.* International Association for *Fu^y-set* Management and Economy/núm. 2, vol I., noviembre, 1996, pp. 3-32.

Peñalva Rosales, Laura P., Juan Carlos Castro Ramírez y Jesús Rodríguez Olaya. "Uso de la lógica difusa para la selección de personal", en *memorias del l Seminario sobre nuevas formas para el manejo de la incertidumbre y la vaguedad en la Administración y la Economía.* UAM-Xochimilco, Departamento de Producción Económica, 1997.

SIGEF. Memorias del III Congreso de la Sociedad Internacional de Gestión y Economía *Fu^y* (SIGEF) /Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Argentina, noviembre de 1996.

Spillman, Bonnie ; R. Spillman y James Bezdek. *Afu^y analysis of consensus in smallgroups,* Mimeo.

Yager, Ronald R. *Satisfaction andfu^y decisión functions,* Mimeo, 1981.