Ejemplos de equilibrios económicos walrasianos

Jorge Ruiz Moreno*
Salvador Ferrer Ramírez*

El objetivo del presente trabajo es dar dos ejemplos de equilibrios económicos, sin entrar al problema de los óptimos de Pareto: un primer ejemplo, donde la ganancia por producir una unidad de cualquier bien es negativa, por lo cual, la producción como el consumo son nulos, y lo mismo ocurre para el salario, pero donde los precios que rigen son positivos. En el segundo ejemplo, tanto el salario y el sistema de precios es positivo, el consumo agregado conlleva a la producción positiva pero los beneficios son nulos.

¿Cómo es una economía en equilibrio económico general? Aquí presentamos dos ejemplos, probando que en efecto son equilibrios.

Introducción

Desde los años sesenta se ha venido desarrollando un programa de investigación que gira en torno a la problemática iniciada por las obras de G. Debreu y K. Arrow. Los modelos económicos llamados Arrow-Debreu resuelven un viejo

* Profesores-investigadores de la División de CSH, UAM-X

problema: ¿cómo *es* una economía descentralizada, motivada por el interés individual y guiada por señales de los precios, que sea compatible con una disposición coherente de los recursos económicos? Una segunda cuestión que se ataca, una vez resuelto el problema anterior, es ¿la economía *podría ser* cierta? La respuesta *positiva* a estas preguntas se resuelven con los teoremas de existencia y bienestar: que se enuncian como sigue.

En una economía de mercados completos, competitiva y conjuntos de consumo y producción convexos *existe* un sistema de precios y actividades de producción y consumo para los agentes económicos que conforman el equilibrio económico. Todo bajo el supuesto de un comportamiento racional en los agentes.

Si las tres hipótesis anteriores son válidas, entonces todo equilibrio competitivo es óptimo de Pareto.

Cualquier óptimo de Pareto puede descentralizarse en un equilibrio competitivo, para un vector de precios anunciado de antemano y distribución previa de recursos.

El planteamiento anterior abre una serie de *cuestionamientos* y nuevas líneas de investigación. Se plantea la forma de cómo este modelo puede sobrevivir si las hipótesis en las cuales se basa son levantadas; se han realizado modelos donde no se consideran supuestos como:

- Mercados completos (existe un mercado presente y futuro para todos los bienes, con información perfecta)
- Mercados competitivos (agentes tomadores de precios)
- Conjuntos de consumo y producción convexos
- En general, tres son los campos del debate:
    - Existencia del equilibrio
    - Estabilidad del equilibrio
    - Alternativas: la teoría del desequilibrio

Aquí presentaremos con algunas modificaciones diferentes un modelo basado en la estructura Arrow-Debreu, las cuales saltan a la vista: las dotaciones iniciales están en manos de las firmas, la tecnología está determinada por una matriz de coeficientes técnicos, lo cual lleva a realizar un modelo lineal, también se considera una matriz de capital fijo. El supuesto de que los consumidores sean propietarios de las firmas es común en dichos modelos. La forma de funcionamiento del modelo es similar al planteado por Arrow-Debreu.

La demostración del teorema de existencia del equilibrio económico, en este modelo, fue realizada por Jacob T. Schwartz en el libro *Lectures on the Mathemaíical Method in Analytical Economics.*

El objetivo del presente trabajo es dar dos ejemplos de equilibrios económicos, sin entrar al problema de los óptimos de Pareto. Un primer ejemplo, donde la ganancia por producir una unidad de cualquier bien es negativa, por lo cual la producción como el consumo son nulos, y lo mismo ocurre para el salario pero donde los precios que rigen son positivos. En el segundo, tanto el salario y el sistema de precios es positivo, el consumo agregado conlleva a la producción positiva pero los beneficios son nulos.

Los ejemplos muestran situaciones posibles para una economía de equilibrio económico walrasiano, el primer ejemplo es una situación en la que la inactividad o el cruzarse de brazos es lo óptimo para los agentes. En el segundo ejemplo hay producción y consumo por parte de las firmas y familias pero las ganancias son nulas. Existen otras posibles situaciones de equilibrio, que de momento no se consideran.

El presente trabajo ha sido discutido en el Seminario de Economía Matemática y Teoría de Juegos del Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias/UNAM. A sus integrantes agradecemos su valiosa colaboración. En particular a Paloma Zapata, Alma Jiménez, César Souza, José Ibarra y Sergio Hernández. Todo error se debe a quienes realizaron el trabajo.

Economías de propiedad privada

Los elementos exógenos del modelo

Los elementos de los cuales consta una economía £ de propiedad privada son:

1) ***i*** mercancías o bienes y fuerza de trabajo.
2) *m* consumidores:

Cada consumidor *i* - 1, 2,..., *m* está caracterizado por los siguientes elementos:

Un Dix Xi c R^{e+1} conjunto de planes de descanso-consumo distinto del vacío.

Un preorden de preferencias <¡ sobre *Dix Xi.*

Una función $U_i: D_i \times X_i \to R$ de utilidad asociada a la relación de preferencia $\preceq_i$.

3) n firmas:
Cada firma $j = 1, 2, ..., n$, tiene un vector columna de recursos iniciales $(Q^j)^t$ $(Q^j_1, Q^j_2, \ldots, Q^j_l)^t$ semipositivo; la entrada Q^j_h indica la cantidad del bien h que tiene la firma j en el inicio del proceso productivo.

4) Una matriz de coeficientes técnicos $A = (a_{hk}) \geq 0$ de tamaño $l \times l$.

5) Una matriz de "capital fijo" $B = (b_{hk}) \geq 0$ del mismo tamaño que A.

6) Un vector renglón de trabajo vivo $L = (l_1, l_2, \ldots, l_l) > 0$.

7) Las firmas están repartidas entre los consumidores. La matriz

$$\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \ldots\theta_{1j}\ldots & \theta_{1n} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \ldots\theta_{2j}\ldots & \theta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_{i1} & \theta_{i2} & \ldots\theta_{ij}\ldots & \theta_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta_{m1} & \theta_{m2} & \ldots\theta_{mj}\ldots & \theta_{mn} \end{pmatrix}$$

representa esta repartición. Aquí θ_{ij} es la fracción que el consumidor i tiene de la firma j. El renglón i representa las fracciones que posee el consumidor i de cada una de las firmas. Al sumar los elementos de la columna j se tiene

$$\theta_{1j} + \theta_{2j} + \ldots + \theta_{mj} = \sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1,$$

lo cual significa que la firma j es propiedad de los consumidores.

8) Existe un periodo de producción fijo $T > 0$.

Expliquemos brevemente cada uno de estos puntos

El punto uno indica que existen $l + 1$ mercados. El punto 2 caracteriza a cada consumidor, cada elemento de $D_i \times X_i$ es de la forma (d_i, x_i) que llamaremos plan de descanso-consumo, $D_i = [0, T]$, es el conjunto de descanso para i y d_i es descanso que realiza el consumidor durante el periodo T; x_i es un vector de consumo de ℓ entradas $(x^1_i, x^2_i, ..., x^h_i, ..., x^\ell_i)$, aquí x^h_i indica la cantidad del bien h que puede demandar el individuo i; esta demanda se realiza al final de T, x^h_i es nulo o positivo por lo cual el vector x_i es no negativo. En general se supone que el conjunto de consumo X_i son todos los vectores x_i de R^ℓ no negativos.

Si un consumidor cualquiera i decide trabajar una cantidad de tiempo $t_i < T$ entonces descansará $d_i = T - t_i$ el cual es no negativo. El individuo lo que busca en este modelo es incrementar d_i tanto como se pueda. Por todo lo anterior la función de utilidad está evaluada en los planes de descanso consumo que realiza cada consumidor durante y al final del periodo T.

Una relación de preferencias $\preceq_i$ sobre $D_i \times X_i$ nos permite decir si un plan de descanso-consumo es preferible a otro, o bien si son indiferentes. Existe un resultado (veáse Debreu en la bibliografía) que afirma que a cada relación de preferencia $\preceq_i$ se le puede asociar una función de utilidad U_i continua. Se dice que una relación de preferencia $\preceq_i$ sobre $D_i \times X_i$ está representada por U_i si $(d_i, x_i) \succeq (d_i', x_i')$ entonces $U_i(d_i, x_i) > U_i(d_i', x_i')$. Para fines de los ejemplos se supone que esta función es diferenciable.

A esta caracterización de los consumidores surgen varias preguntas, entre otras: ¿existirá alguna forma social económica, donde los consumidores se caractericen por estos principios?, ¿la conducta de los consumidores que conocemos se puede resumir en estos supuestos? Hay una respuesta *"positiva"* a estas preguntas, pero no cabe duda que hay serios cuestionamientos.

El punto 3 dice que cada firma tiene un vector de recursos iniciales. Estos recursos son llevados al mercado al inicio de T, con lo cual obtienen un capital el cual pueden intercambiar por medios de producción, esto se identifica con la adquisición de capital fijo. Se supone que todo esto se realiza de manera automática.

Cada firma $j = 1, 2,.., n$ puede producir cualquiera de los bienes existentes en la economía, es decir cada firma puede disponer de medios de producción, de modo que si decide producir tal o cual bien lo puede realizar. La cantidad por producir dependerá del capital disponible por la firma.

El punto cuatro indica que existe una única manera de producir cada bien, y esta es conocida por cada una da las firmas. La matriz A representa precisamente lo anterior. La columna *h-ésima* cuantifica las distintas cantidades de los bienes para producir una unidad del bien en cuestión.

En el punto cinco, la matriz *B* está cuantificando los medios de producción para realizar el proceso productivo, por ejemplo supongamos que el bien *h* es una mesa de madera, para su elaboración se requiere de un martillo, sin el martillo no se produce la mesa, pero no todo el martillo se insume dentro del proceso productivo. En la matriz *A* se cuantifica la cantidad insumida.

Cada uno de los bienes requiere de fuerza de trabajo para su realización, esta cantidad se mide en tiempo que es necesario para la producción cada bien de manera unitaria. Así, el bien *h* requiere de /¿jornadas de trabajo. Esto se establece en el punto seis.

El punto siete justifica el nombre de economía de propiedad privada, la repartición de las firmas entre los consumidores. Para la mayoría de los agentes económicos se tiene que 0ij = 0, lo cual significa que la fracción de la firmaj que posee el consumidor i es cero. Si por ejemplo todo el renglón *i* consta de ceros significa que el consumidor obtendrá solamente un ingreso durante el periodo T por la venta de su fuerza de trabajo.

Funcionamiento del modelo en un periodo T

La actividad económica durante el periodo T comienza cuando un "subastador" anuncia el salario y los precios que regirán durante todo este periodo. En el momento que son anunciados, esta información corre por todos los agentes, es decir, existe un conocimiento público del salario y los precios, y ningún agente los cuestiona ni los modifica, esto se resume diciendo que los agentes son tomadores de precios.

Se representa "un sistema de salario-precios como el vector (i, P) £ W^{+1}, donde CO es la tasa salarial y P = $(P_p\ P_2,$ ...,P¿,...P^) con P¿ precio de una unidad del bien *h*.

Las firmas

Aquí las firmas deciden de manera racional, veamos que significa esto. Ya habíamos mencionado que cada firma tiene un vector columna de recursos iniciales (Qi)[1] y estos los vende a los precios vigentes P, por lo cual obtiene un capital que llamaremos ¿?i el cual es igual a *PQi* Con este capital se compra "capital fijo" para llevar a cabo el proceso productivo.

Veamos cómo se calcilla el costo del capital fijo para llevar a cabo un plan de producción. Un plan de producción para la firma j es la determinación de cantidades no negativas Y^J_p Y^J_2, ..., Y^J_k, ..., Y^{Je} de cada uno de los distintos bienes, donde Y^J_k representa la cantidad del bien *k* que producirá la firma j durante el periodo T. Supongamos que la firma j ya determinó un plan de producción. Entonces, la cantidad de capital fijo de tipo *h* necesario para producir este plan de producción es bhi$Y^{j+bb2Yj}$ ••• + *hk* $Y^J k$ + ••• + $h_¿$ Y^1^ (obsérvese: el producto anterior es multiplicar el renglón *h* de la matriz J3 por el plan de producción, y b_{hk} Y^J_k es la cantidad de capital fijo del tipo *h* para producir Y^j). Llamando *(Yj)* = *(Y^j, Y^j*, ..., *Y^j)* (vector renglón) y usando la forma matricial se tiene que cada entrada de *BY:* nos dice la cantidad de capital fijo que se requiere de cada uno de los bienes. Así, entonces, la expresión *PBY¡* nos dice el valor del capital fijo para realizar el plan de producción *Y,* La entrada *h* de *PB* nos indica el costo del capital fijo para producir una unidad del bien *h.* Esta entrada es

$$\sum_{k=1}^{i} P_k a_{kh}$$

y se denotará por a_h . Se dirá que un plan de producción *Y-* es posible de ser llevado a cabo por la firmay, si el costo del capital fijo no rebasa el capital 6^J. Denotemos con *p* ' = {Y ¡Í O : PBYj £PQ ' = <?'} al conjunto de planes de producción que son factibles para la firma y.

El beneficio (ingresos menos costos) por producir el plan de producción Y- (dado el sistema de precios *P)* es *g-* = PY *-PAY--* *ÚDLY-* - (P - *PA* - ¿yL) Y, Aquí *PY-* representan los ingresos y *PAY•* + *CüLY-*, los costos, los cuales están repartidos en costos de insumos y pago de salarios. La entrada *h* del vector *(P - PA - ú)L)* es

$$P_h " \sum_{k=1}^{i} P_k a_{hk} -<B<h$$

y representa la ganancia por producir una unidad del bien *h,* a esta cantidad la denotaremos como y¿.

El que una firmay se comporte de manera racional significa que escogerá dentro de todos los planes de producción que le son factibles aquellos con los cuales obtenga la máxima ganancia, es decir, cada firma resolverá el siguiente problema de programación lineal:

$$\max_{s.a\ Y_j \in \wp^j} (P - PA - \omega L)Y_j$$

o lo que es lo mismo

$$\max \sum_{h=1}^{l} \gamma_h Y_h^j$$

$$\text{sujeto a } \sum_{h=1}^{l} \alpha_h Y_h^j \leq \ell^j$$

$$\text{con } Y_h^j \geq 0$$

Esta forma nos ayuda para considerar el problema de cada firma como un problema de programación lineal.

El consumidor

El consumidor también actúa de manera racional, expliquemos esto. El ingreso de un consumidor *i* está determinado por dos cantidades, una correspondiente al salario que obtuvo durante T, la otra parte es por ser accionista en las distintas firmas. Si el consumidor / decide trabajar el tiempo /. de T entonces el salario que obtendrá será de *Cút*$_t$. Como *d¡* + *t¿* - T entonces *(út*$_i$ - *úXT* - ¿/¡) (recuerde el punto dos de los elementos exógenos).

Supongamos que cada firma elige un plan de producción que es factible, es decir, cada firma elige un vector de la forma Y_p Y_2, —, Y_n, respectivamente. Con estos planes se obtiene el siguiente vector de beneficios g_p g_2, ..., g_n correspondiente a cada firma. El consumidor *i* es accionista en las distintas firmas, lo cual está representado con las cantidades 6Ü, 9i2, ...,9¡j, ...,0in. Con estas cantidades conocidas al final del periodo T el consumidor obtiene la parte del beneficio que le corresponde por ser accionista en cada firma; Qygj es la parte del beneficio de la firma y que le corresponde a *i*. Sumando sobre/ se tiene el ingreso de *i* por ser accionista en las distintas firmas:

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j$$

Así, el ingreso de *i* chitante el periodo T es

$$\omega t_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j .$$

Con este ingreso, cada consumidor demandará una canasta de bienes x_i- $(x^1, x^2,..,x^h,..,x^l)$ • Se supone que el costo de esta canasta de mercancías no debe rebasar el ingreso obtenido durante el periodo T, es decir

$$Px_i \leqq \omega t_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j .$$

Pero obsérvese que esta desigualdad es equivalente a

$$Px_i \leqq \omega (T - d_i) + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j ,$$

y se llega a la siguiente desigualdad

$$(\omega, P)(d_i, x_i) \leqq \omega T + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j .$$

Se dice que un plan de descanso-consumo *(d-, xi)* es posible de ser llevado a cabo por *i* si la desigualdad anterior se cumple. El conjunto de planes descanso-consumo posibles de i es

$$\left\{ (d_i, x_i) \in D_i x X_i : (\omega, P)(d_i, x_i) \leqq \omega T + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j \right\}.$$

En esta concepción, lo que busca el consumidor es elegir el plan de descanso-consumo que maximice su función de utilidad, es decir, cada consumidor *i* resuelve el siguiente problema:

$$\max U_i(d_i, x_i)$$

$$\text{sujeto a} \left\{ (d_i, x_i) \in D_i x X_i : (\omega, P)(d_i, x_i) \leqq \omega T + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j \right\}$$

Definición de equilibrio económico

Definición: Dada una economía E de propiedad privada. Un equilibrio económico consta de:

1) Un vector (©, P) E R+' de salario-precios; con w número real y el vector p = (Pj s p 2 ,.,., p h ,..., ?() donde P_h es el precio de una unidad del bien *h*.

2) Para cada *j* = 1, 2,..,*n* un vector (columna) de producción $\overset{*}{Y}_j = \begin{pmatrix} \overset{*}{Y}{}_1^j \\ \overset{*}{Y}{}_2^j \\ \vdots \\ \overset{*}{Y}{}_\ell^j \end{pmatrix}$

3) Para cada *i* = 1, 2,..., *m* un vector de descanso-consumo $(\overset{*}{d}_i, \overset{*}{x}_i)$ e $D_i x X_i$
Tal que cumplen lo siguiente:

a) $(\overset{*}{\omega}\ \overset{*}{P}) > \bar{0}$ es semipositivo (es decir, al menos una de sus entradas es positiva).

b) Para cadaj = 1, *2*, ...,», Y optimiza el beneficio relativo a (Q p)

es decir Y es solución al problema:

$$\max\left[\overset{*}{P} - \overset{*}{P}A - \overset{*}{\omega}\ L\right]Y_j$$

$$\text{sujeto a } Y_j \in \left\{Y_j \geqq \bar{0} : \overset{*}{P}\ BY_j \leq \overset{*}{P}\ Q^j\right\}$$

c) Para cada i =, *2*,...,*m*, $(\overset{*}{d}_i, \overset{*}{x}_i)$ maximiza la función de utilidad, es decir /-¿. x \ es solución al problema:

$$\max U_i(d_i, x_i)$$

$$\text{sujeto a } \left\{(d_i, x_i) \in D_i x X_i : (\omega, P)(d_i, x_i) \leqq \omega T + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} g_j\right\}$$

d) Todo lo demandado es ofrecido:

$$\sum_{i=1}^{m} \overset{*}{x}_i \leqq (I - A) \sum_{j=1}^{n} \overset{*}{Y}_j$$

$$L \sum_{j=1}^{n} \overset{*}{Y}_j \leqq \sum_{i=1}^{m} (T - \overset{*}{d}_i)$$

Si la desigualdad se vale en algún caso se tiene un precio nulo.

Es decir, un equilibrio económico consta de un plan de producción factible para cada firma, un plan de descanso-consumo para cada consumidor, tales que dichos planes maximizan la ganancia y función de utilidad de cada firma y consumidor, respectivamente, y donde la oferta es igual a la demanda en el caso de precios positivos.

Ejemplos de economías en equilibrio

Un equilibrio sin producción y salario cero

Consideremos una economía con los elementos exógenos establecidos anteriormente, pero con *A* > 0 matriz de coeficientes técnicos y el valor propio de Frobenius *X(A)* > 1. Con estas condiciones se afirma que las siguientes cantidades conforman un equilibrio económico:

1) El vector salario-precio, con el salario co nulo y p) o vector propio de Frobenius asociado a A,(y4), el cual es positivo, es decir (Q ; P) > 0
2) Para cada y = 1, 2,.., *n* un vector y. = 0 (columna) de producción. El no producir nada es la actividad que deja un máximo beneficio a cada una de las firmas.
3) Para cada *i* = 1, 2,..., *m* un vector de descanso-consumo (d¡, x¡) = (T, 0), con lo cual cada consumidor se dedica a descansar todo el tiempo y el consumo es cero.

Aquí 1), 2) y 3) son cantidades que conforman un equilibrio económico general; en efecto, veamos que se cumplen las propiedades a), b), c) y d)

a) se cumple por 1) ya que $(\overset{*}{\omega}, \overset{*}{P}) \geq 0$ es semipositivo.

b) se cumple por los siguientes argumentos. En primer lugar observemos la expresión p- p A - co L • Como P es el vector de Frobenius asociado al valor propio *X(A)* se cumple la igualdad P A = A,(A) P . Por lo que (recordando que ^ =^0) P-PA-co L = P-A.(A)P -0L =(1 -A.(A))P (0 • Pero la expresión P-PA-co L= (Yi> —>Yh»—Y¿') es un vector renglón de *l* entradas, donde cada entrada representa la ganancia unitaria por producir el bien correspondiente. Es decir, en esta economía al producir una unidad de cualquier bien la ganancia será negativa. Por lo que la firma y decidirá producir nada. Es decir Yj - 0.

c) Observemos cuál es el conjunto sobre el que se optimiza la función de utilidad:

$$\left\{(d_i, x_i) \in D_i x X_i : (\overset{*}{\omega}, \overset{*}{P}) \bullet (d_i, x_i) \le \overset{*}{\omega} T + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \left[\overset{*}{P} - \overset{*}{P} - \overset{*}{\omega} L\right] \overset{*}{Y}_j \right\} =$$

$$\left\{(d_i, x_i) \in D_i x X_i : \overset{*}{P} \bullet x_i \le 0\right\} = \left\{(d_i, x_i) = (T, \bar{0})\right\}$$

El vector $(\overset{*}{d}_i, \overset{*}{x}_i) = (T, \bar{0})$ es el único elemento de este conjunto, por lo cual optimiza *U¿*.

d) Como P > o y co = 0 entonces la oferta es igual a la demanda en los *l*, veamos que esto se verifica: Por la forma de como son la demanda y producción en el equilibrio, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} \overset{*}{x}_i = \bar{0} \text{ y } \sum_{j=1}^{n} \overset{*}{Y}_j = \bar{0}$$

$$\text{por lo cual } \sum_{i=1}^{m} \overset{*}{x}_i = \bar{0} = (I - A) \sum_{j=1}^{n} \overset{*}{Y}_j$$

$$\text{y } L \sum_{j=1}^{n} \overset{*}{Y}_j = 0 = \sum_{i=1}^{m} (T - \overset{*}{d}_i) = \sum_{i=1}^{m} (T - T) = \sum_{i=1}^{m} 0 = 0$$

Con lo cual la afirmación queda probada.

Un equilibrio sin ganancias pero con producción no nula

Nuevamente consideremos una economía con los elementos exógenos descritos al inicio, con las siguientes características:

Para cada consumidor i = 1, 2, ..., m una función de utilidad Bernoulli

$$U_i : D_i \times X_i \rightarrow \Re$$

$$U_i(d_i, x_i) = U_i(d_i, x_i^1, x_i^2, ..., x_i^h, ..., x_i^\ell) = \alpha \log(d_i) + \sum_{h=1}^{\ell} a_h \log(x_i^h)$$

$$\text{con } \alpha + \sum_{h=1}^{\ell} a_h = 1,$$

donde ***a*** y todos los a_h son números no negativos.

La matriz A de coeficientes técnicos será considerada conectada y positiva. La matriz J3 de capital fijo es cualquiera que cumpla queB ±:*A* y L > 0 y para today =1,2, ..., «un vector $(Q^j)'$ = (QJ,Q2 -"jQ^)' no negativo suficientemente grande, tal que

$$\sum_{j=1}^{n} Q^j$$

suficientemente grande.

En este caso, se afirma que las siguientes cantidades conforman un equilibrio económico:

1) $\dot{\omega} = 1$ y $\dot{P} = \dot{\omega} L(I - A)^{-1} \rangle 0$.
2) Para cada j = 1, 2, ..., n un vector $\dot{Y}_j \geq \bar{0}$ tal que $\dot{P} B \dot{Y}_j \leq \dot{P} Q^j$.
3) Para cada i =1, 2, ..., m un plan el descanso consumo

$$\dot{d}_i = \alpha T, \dot{x}_i^h = \frac{\dot{\omega}}{\dot{P}_h} a_h T \text{ con } h = 1, 2, ..., \ell$$

Los argumentos son los siguientes:

a) (oo, P) es un vector positivo.

b) Se afirma que las ganancias son nulas, en efecto:

$$\overset{*}{P} - \overset{*}{P}A - \overset{*}{\omega} L = \overset{*}{P}(I - A) - \overset{*}{\omega} L = \left[\overset{*}{\omega} L(I - A)^{-1}\right](I - A) - \overset{*}{\omega} L = \bar{0}$$

Así, cuando se calcula el beneficio para un plan de producción Y SO arbitrario, que cumpla P BYj < P Q^J, se tiene que

$$\left[\overset{*}{P} - \overset{*}{P}A - \overset{*}{\omega} L\right]Y_j = \bar{0} \bullet Y_j = 0 .$$

Por lo cual la ganancia máxima es cero.

c) Tenemos que probar que, para cada *i* —, *2*, ..., m (d_i, x_i) maximiza la función de utilidad; esto se argumenta mediante una aplicación del teorema de multiplicadores de Lagrange:

$$\overset{*}{d}_i = \alpha T,$$

$$\overset{*}{x}{}_i^h = \frac{\overset{*}{\omega}}{\overset{*}{P}_h} a_h \, T \text{ con } h = 1, 2, \ldots, \ell$$

d) Como todos los precios son positivos, se debe verificar que la demanda es igual a la oferta en todos y cada uno de los / +1 mercados, es decir, tenemos que verificar que:

$$\sum_{i=1}^{m} \overset{*}{x}_i = (I - A) \sum_{j=1}^{n} \overset{*}{Y}_j \quad y \quad L \sum_{j=1}^{n} \overset{*}{Y}_j = \sum_{i=1}^{m} (T - \overset{*}{d}_i)$$

Para esto, hacemos los siguientes pasos, primero calculamos el descanso y demanda globales en los *i* mercados

$$\overset{*}{d} = \sum_{i=1}^{m} \overset{*}{d}_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha T = m\alpha T$$

$$\overset{*}{x} = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{m} \overset{*}{x}{}_1^h \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^{m} \overset{*}{x}{}_l^h \end{pmatrix} = m \overset{*}{\omega} T \begin{pmatrix} \frac{1}{\overset{*}{P}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\overset{*}{P}_\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix}$$

El cual es un vector positivo.

Llamando

$$\overset{*}{x} = \sum_{i=1}^{m} \overset{*}{x}_i , \quad \dot{Y} = \sum_{j=1}^{n} \dot{Y}_j$$

se deben tener las siguientes igualdades:

$$\dot{x} = (I - A)\dot{Y} \quad y \quad L\dot{Y} = \sum_{i=1}^{m} (T - \dot{d}_i)$$

donde la producción es $Y = (I - A) \quad x\ )\ 0$; (la positividad es debido a la positividad de los dos factores). Es decir, la producción que satisface la demanda es positiva. Como estamos pidiendo que

$$\sum_{j=1}^{n} Q^{j}$$

es suficientemente grande, quiere decir que el conjunto de las firmas pueden emplear su capital que satisface la oferta para cubrir la demanda establecida.

Ahora probaremos que la oferta y demanda en el mercado de trabajo se igualan. Para ello, consideremos la demanda de trabajo de la manera siguiente:

$$\dot{Y} = (I - A)^{-1} \overset{*}{x} = (I - A)^{-1} m \dot{\omega} T \begin{pmatrix} \frac{1}{\overset{*}{P}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\dot{P}_\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix} .$$

Por lo cual, la demanda de trabajo que realiza el conjunto de las firmas para obtener el vector de producción Y es:

$$L\dot{Y} = m \overset{*}{\omega} T L (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\dot{P}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\dot{P}_\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix}$$

Recordando que $\overset{*}{\omega} = 1$ y $\overset{*}{P} = \overset{*}{\omega} L(I - A)^{-1}$ llegamos **a**

$$L\overset{*}{Y} = mT\overset{*}{P}\begin{pmatrix} \frac{1}{\overset{*}{P}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\overset{*}{P}_\ell} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix} = mT(\overset{*}{P}_1, \overset{*}{P}_2, \ldots, P_h, \ldots, \overset{*}{P}_\ell)\begin{pmatrix} \frac{1}{\overset{*}{P}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\overset{*}{P}_\ell} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix}$$

Es decir

$$L\overset{*}{Y} = mT(1, 1, \ldots, 1)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\ell \end{pmatrix} = mT(a_1 + a_2 + \ldots + a_\ell) = mT(1 - \alpha)$$

es **la** forma matemática para representar la demanda de trabajo. Veamos cómo es la oferta de trabajo:

$$\sum_{i=1}^{m} \overset{*}{t}_i = \sum_{i=1}^{m}(T - \overset{*}{d}_i) = \sum_{i=1}^{m}(T - \alpha T) = mT - m\alpha T = mT(1 - \alpha)$$

Finalmente, llegamos a $L\sum_{j=1}^{n} \overset{*}{Y}_j = \sum_{i=1}^{m}(T - \overset{*}{d}_i)$

De todo esto podemos afirmar que se tiene un equilibrio económico donde tanto el salario como los precios de todos los otros bienes son positivos, el consumo de cada familia también es positivo y por tanto la oferta de las firmas es positivo, pero donde las ganancias son nulas.

Conclusiones

La respuesta "positiva", a cómo es una economía descentralizada y guiada por las señales de los precios, de tal forma que haya una disposición coherente de los recursos, es un planteamiento realizado en términos matemáticos. Sin entrar a discutir si las asignaciones determinadas para los agentes son óptimos de Pareto o discutir el problema de la estabilidad en los ejemplos presentados, lo que podemos afirmar es que las situaciones que ejemplificamos no pueden negarse y que presentan dos posibilidades dentro de la respuesta "positiva".

Bibliografía

Arrow, K. J. y Hanh F. H. *Análisis general competitivo:* FCE, México, 1977.

Debreu, G. *Theory of Valué:* Wiley, Nueva York, 1959.

Schwartz J. T. *Lectures on the Mathematical Method in Analytical Economics:* Gordon and Breach, Nueva York, 1961.